



الرياضيات

الصف الثانى الإعدادى

عام وأزهر

هدية مجانية

إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

مراجعة على ما سبق

١ مجموعات الأعداد

١) مجموعة أعداد العد "ع"

ع = {١، ٢، ٣، ٤، ...}

٢) مجموعة الأعداد الطبيعية "ط"

ط = {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ...}

∴ ط = ع ∪ {٠}

٣) مجموعة الأعداد الصحيحة "ص"

ص = {... ، -٢، -١، ٠، ١، ٢، ٣، ...}

وفيها

ص+ = {١، ٢، ٣، ٤، ...}

ص- = {-١، -٢، -٣، -٤، ...}

ص = ص+ ∪ {٠} ∪ ص-

ملحوظة الصفر ليس موجب وليس سالب

٤) مجموعة الأعداد النسبية "ن"

ن = { أ/ب : أ، ب ∈ ص، ب ≠ ٠ }

لاحظ أن

ع ⊂ ط ⊂ ص ⊂ ن

٢ القيمة المطلقة

١) |-٢| = ٢

٢) |٢| = ٢

إذا كانت |س| = ٢ فإن س = ± ٢

إذا كانت |س| = ٥ فإن س = ± ٥

٣ الأسس

١) $أ^{-ن} = \frac{1}{أ^{ن}}$

٢) $أ^{ن} \times أ^{م} = أ^{ن+م}$ في حالة الضرب نجمع الأسس

٣) $أ^{ن} \div أ^{م} = أ^{ن-م}$ في حالة القسمة نطرح الأسس

٤) $(أب)^{ن} = أ^{ن} ب^{ن}$ قانون توزيع الأسس

٥) $\left(\frac{أ}{ب}\right)^{ن} = \frac{أ^{ن}}{ب^{ن}}$

٦) $(أ^{ن})^{م} = أ^{ن \times م}$ لو أس مرفوع لأس نضرب

٤ الصورة القياسية

١) ٧٣٢١٥ = ٧٫٣٢١٥ × $١٠^{٤}$

٢) ٠٫٠٠٠٣١٦ = ٣٫١٦ × $١٠^{-٤}$

الجذور التربيعية

① $\sqrt{١} = ١$

② $\sqrt{٤} = ٢$

③ $-\sqrt{٩} = -٣$ وهكذا

④ إذا كانت $س^٢ = ٢٥$
فإن $س = \pm\sqrt{٢٥} = \pm ٥$

⑤ إذا كانت $س^٢ = ١٠٠$
فإن $س = \pm\sqrt{١٠٠} = \pm ١٠$

يعنى من الرموز نحصل $\pm$

⑥ مجموع الجذرين التربيعيين للعدد ٢٥
= صفر
لأن الجذرين هما ± ٥ ومجموعهما = صفر

⑦ $\sqrt{أ^٢} = |أ|$

⑧ $\sqrt{(٥)^٢} = ٥$

⑨ $\sqrt{(-٣)^٢} = |-٣| = ٣$

حل المعادلات

① $س + ٣ = ٧$ ، س ∈ ط

الحل

$س = ٧ - ٣$ $س = ٤$

∴ م.ح = {٤}

متنساش اللى بيدى الكلاسيكى يدفع الأجرة [متغير إشارته]

② $٢س - ٥ = ١٣$ ، س ∈ ن

الحل

$٢س = ١٣ + ٥$

$٢س = ١٨$ بالقسمة على ٢

$\frac{٢س}{٢} = \frac{١٨}{٢}$

∴ $س = ٩$

∴ م.ح = {٩}

③ $س^٢ - ٣ = ٦$ س ∈ ن

الحل

$س^٢ = ٦ + ٣$ $س^٢ = ٩$

∴ $س = \pm\sqrt{٩} = \pm ٣$

∴ م.ح = {±٣}

١ الجذر التكعيبى للعد النسبي

الوحدة الأولى

ملاحظات

١) الجذر التكعيبي للعدد م = $\sqrt[3]{م}$
هو العدد الذى مكعبه = م

٢) يوجد جذر تكعيبي لعدد سالب
$\sqrt[3]{-8} = -2$ ، $\sqrt[3]{-125} = -5$

٣) إذا كان ما تحت الجذر له أس فإننا نقسم الأس على الدليل اللي بره

* $\sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$
* $\sqrt[3]{(-3)^3} = (-3)^{\frac{3}{3}} = -3$
* $\sqrt[3]{م^6} = م^{\frac{6}{3}}$
* $\sqrt[3]{م^5} = م^{\frac{5}{3}}$ وهكذا

٤) فى حل المعادلات يكون $\sqrt[3]{م}$ لوحده واحدة فقط

$س^3 = 27$ ∴ $س = \sqrt[3]{27} = 3$

$س^3 = -125$ ∴ $س = \sqrt[3]{-125} = -5$

احفظ الجدول ده كويس

العدد	١	٨	٢٧	٦٤	١٢٥	٢١٦	٣٤٣	٥١٢	١٠٠٠
الجذر التكعيبى	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	١٠

الفكرة الأولى

١) أكمل

١) $\sqrt[3]{125} = 5$

٢) $\sqrt[3]{-1} = -1$

٣) $\sqrt[3]{-8} = -2$

٤) $\sqrt[3]{-27} = -3$

٥) $\sqrt[3]{1000} = 10$

٦) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}$

٧) $\sqrt[3]{0.125} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \frac{5}{10} = 0.5$

٨) $\sqrt[3]{\frac{-8}{125}} = \frac{-2}{5}$

٩) $\sqrt{16} + \sqrt[3]{-64} = 4 + (-4) = 4 - 4$ = صفر

الفكرة الثانية

٢ حل المعادلات الآتية في ح

(١) $س^{٣} + ٢٧ = ٠$

الحل

$س^{٣} = -٢٧$ بأخذ $\sqrt[٣]{}$

$\therefore س = \sqrt[٣]{-٢٧} = -٣$

$\therefore$ م.ح = $\{-٣\}$

---

(٢) $٨س^{٣} + ٧ = ٨$

الحل

$٨س^{٣} = ٨ - ٧$

$\therefore ٨س^{٣} = ١$ ÷ ٨

$س^{٣} = \frac{١}{٨}$ بأخذ $\sqrt[٣]{}$

$\therefore س = \sqrt[٣]{\frac{١}{٨}} = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ م.ح = $\{\frac{١}{٢}\}$

---

(٣) $٢س^{٣} - ٥ = س^{٣} + ٣$

الحل

$٢س^{٣} - س^{٣} = ٣ + ٥$

$س^{٣} = ٨$ بأخذ $\sqrt[٣]{}$

$\therefore س = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

$\therefore$ م.ح = $\{٢\}$

---

(٤) $(س + ٣)^{٣} = ٣٤٣$

الحل

بأخذ $\sqrt[٣]{}$ للطرفين

$\therefore (س + ٣) = \sqrt[٣]{٣٤٣} = ٧$

$\therefore س + ٣ = ٧$

$\therefore س = ٧ - ٣ = ٤$

$\therefore$ م.ح = $\{٤\}$

---

(٥) $(٥س - ٢)^{٣} + ١٠ = ١٨$

الحل

$(٥س - ٢)^{٣} = ١٨ - ١٠$

$(٥س - ٢)^{٣} = ٨$ بأخذ $\sqrt[٣]{}$

$(٥س - ٢) = \sqrt[٣]{٨} = ٢$

$٥س - ٢ = ٢$

$٥س = ٢ + ٢ = ٤$

$٥س = ٤$ $\therefore س = \frac{٤}{٥}$

$\therefore$ م.ح = $\{\frac{٤}{٥}\}$

" من جد وجد
ومن زرع حصد "

٣ أوجد قيمة س

١) $س^٣ = -١٢٥$

بأخذ $\sqrt[٣]{\ }$ ∴ $س = \sqrt[٣]{-١٢٥}$

∴ $س = -٥$

٢) $س^٣ = ٦٤$

بأخذ $\sqrt[٣]{\ }$ ∴ $س = \sqrt[٣]{٦٤}$

∴ $س = ٤$

٣) $\sqrt[٣]{س} = ٥$

بتكعيب الطرفين

∴ $س = (٥)^٣ = ١٢٥$

٤) $\sqrt[٣]{س} = ٣$

بتكعيب الطرفين ∴ $س = (٣)^٣$

$س = ٢٧$

٣) حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \pi$ نق^٣

٤) ١ لتر = ١٠٠٠ سم^٣

٤ أكمل يا شاطر

١) مكعب حجمه ١٢٥ سم^٣ فإن طول

حرفه = ---- $\sqrt[٣]{١٢٥} = ٥$ سم

٢) مكعب حجمه ١٠٠٠ سم^٣ فإن طول

حرفه = ---- $\sqrt[٣]{١٠٠٠} = ١٠$ سم

٣) مكعب طول حرفه ٣ سم فإن حجمه

= ---- $(٣)^٣ = ٢٧$ سم^٣

يبقى لو عايز يد الحجم نكعب

ولو عايز يد طول الحرف نأخذ $\sqrt[٣]{\ }$

الفكرة الثالثة التطبيقات

قوانين هامة

١) حجم المكعب = ل^٣

٢) طول حرف المكعب = $\sqrt[٣]{\text{للحجم}}$

٥ أوجد طول قطر كرة حجمها ٣٨٨٠٨ سم^٣ (علماً بأن $\pi = \frac{٢٢}{٧}$)

الحل

∵ حجم الكرة = $\frac{٤}{٣} \pi$ نق^٣

∴ $\frac{٤}{٣} \times \frac{٢٢}{٧}$ نق^٣ = ٣٨٨٠٨

$\frac{٨٨}{٢١}$ نق^٣ = ٣٨٨٠٨

$\therefore$ نق^3 = ٣٨٨٠٨ × $\frac{٢١}{٨٨}$

طبعاً إما نقسم على المعامل

أو نضرب × المقلوب الضربي للمعامل

$\therefore$ نق^3 = ٩٢٦١ بأخذ $\sqrt[3]{}$

$\therefore$ نق = $\sqrt[3]{٩٢٦١}$ = ٢١ سم

$\therefore$ طول القطر = ٢ نق = ٢ × ٢١ = ٤٢ سم

الواجب

١ أكمل

(١) $\sqrt[3]{-١}$ = (٢) $\sqrt[3]{٨}$ =

(٣) $\sqrt[3]{١٢٥}$ = (٤) $\sqrt[3]{-١٠٠٠}$ =

(٥) $\sqrt[3]{م^3}$ = (٦) $\sqrt[3]{م^6}$ =

(٧) $\sqrt[3]{\frac{١}{٨}}$ = (٨) $\sqrt[3]{٠,١٢٥}$ =

(٩) مكعب حجمه ٦٤ سم^3 فإن طول حرفه = ...

(١٠) مكعب حجمه ١٢٥ سم^3 فإن طول حرفه = ...

(١١) مكعب حجمه ١ لتر فإن طول حرفه = ...

(١٢) مكعب طول حرفه ٣ سم فإن حجمه = ...

(١٣) مكعب طول حرفه ٢ سم فإن حجمه = ...

(١٤) $\sqrt[3]{٨}$ + $\sqrt[3]{-٨}$ = ...

(١٥) $|\sqrt[3]{-١٢٥}|$ = ...

(١٦) $\sqrt{٩}$ + $\sqrt[3]{-٨}$ =

(١٧) $\sqrt{٦٤}$ − $\sqrt[3]{٦٤}$ =

٢ أوجد قيمة س

(١) س^3 = ١٠٠٠

(٢) س^3 = − ٦٤

(٣) $\sqrt[3]{س}$ = ٢

(٤) $\sqrt[3]{س}$ = −٣

(٥) $\sqrt[3]{س}$ = $\frac{-١}{٢}$

٣ أوجد مجموعة حل المعادلات في ن

(١) س^3 + ١ = ٩

(٢) س^3 + ٣ = −٢٤

(٣) ٨ س^3 − ٥ = ٥٩

(٤) (س − ٢)^3 = ١٢٥

(٥) (س + ١)^3 = ٢٧

٤ أوجد طول نصف قطر كرة حجمها = ٤٨٥١ سم^3 (ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

الوحدة الأولى ٢ مجموعة الاعداد غير النسبية $\bar{ن}$

فاكر السنة اللى فاتت كنا بنعرف العدد النسبي إزاى؟

* **العدد النسبي** هو العدد الذي يمكن وضعه على صورة $\frac{أ}{ب}$

علشان كده بنقول

* **العدد غير النسبي** هو العدد الذي لا يمكن وضعه على صورة $\frac{أ}{ب}$

أمثلة للاعداد غير النسبية

١ الجذور التربيعية للاعداد التي ليست مربعات كاملة مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٨}$ وهكذا

٢ الجذور التكعيبية للاعداد التي ليست مكعبات كاملة مثل $\sqrt[٣]{٥}$ ، $\sqrt[٣]{٩}$ وهكذا

٣ النسبة التقريبية (π)

ملاحظات

١ الاعداد النسبية ن

٢ الاعداد غير النسبية $\bar{ن}$

٣ $ن \cap \bar{ن} = \emptyset$ مفيش تقاطع

٤ $ن \cup \bar{ن} = ح$ الاتحاد بيكون ح

الفكرة الأولى

مثال ١ أكمل بوضع $\in$ أو $\notin$

١ $٣ \in ن$

٢ $٥ \notin \bar{ن}$

٣ $\sqrt{٤} \in ن$

٤ $\sqrt{٤} \notin \bar{ن}$

٥ $\sqrt{٥} \notin ن$

٦ $\sqrt{٧} \in \bar{ن}$

٧ $\sqrt{٨} \notin ن$

٨ $\sqrt[٣]{٨} \notin \bar{ن}$

شبيه أكمل بوضع ن أو $\bar{ن}$

١ $\sqrt{٥} \in$ ....

٢ $\sqrt{٩} \in$ ....

٣ $\sqrt[٣]{٨} \in$ ....

٤ $\sqrt{٨} \in$ ....

٥ $\pi \in$ .... بينما $\frac{٢٢}{٧} \in$ ....

الفكرة الثانية: إيجاد قيمة تقريبية لعدد غير نسبي

ملحوظة: كل عدد غير نسبي تقع قيمته بين عددين نسبيين

مثال ٣: أوجد عددين صحيحين ينحصر بينهم $\sqrt{5}$

الحل

$\sqrt{9} > \sqrt{5} > \sqrt{4}$

$3 > \sqrt{5} > 2$

$\therefore$ $\sqrt{5}$ ينحصر بين ٢ ، ٣

مثال ٤: أوجد عددين صحيحين ينحصر بينهم $\sqrt{13}$

الحل

$\sqrt{16} > \sqrt{13} > \sqrt{9}$

$4 > \sqrt{13} > 3$

$\therefore$ $\sqrt{13}$ ينحصر بين ٣ ، ٤

مثال ٥: اثبت أن $\sqrt{2}$ ينحصر بين ١,٤ ، ١,٥

الحل

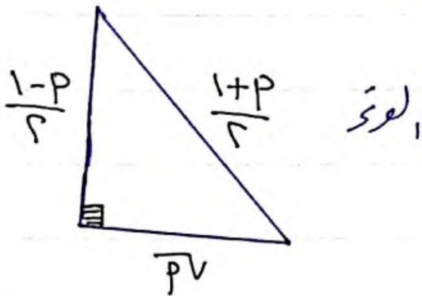
$(1.4)^2 = 1.96$ ، $(1.5)^2 = 2.25$

$\because 2.25 > 2 > 1.96$

$\therefore 1.5 > \sqrt{2} > 1.4$

الفكرة الثالثة: تمثيل العدد غير النسبي على خط الأعداد

احفظ شكل المثلث ده علشان هنتعلم منه رسم العدد غير النسبي.



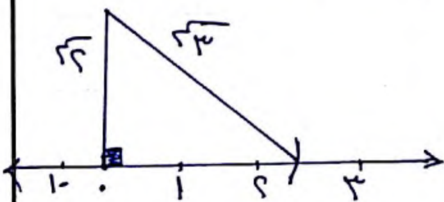
مثال ٦: ارسم قطعة طولها $\sqrt{ه}$ واستخدمها في تعيين النقط التالية

(١) $\sqrt{5}$

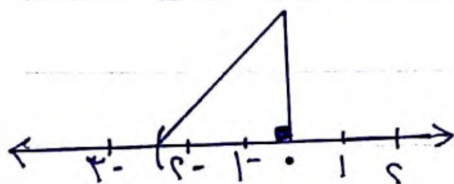
الحل

الوتر: $\frac{م+1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

ضلع: $\frac{م-1}{2} = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$



(٢) $-\sqrt{5}$



الفكرة الرابعة
حل المعادلات فى ح

مثال ٧ أوجد م.ح حيث س ∈ ح

١) $س^{٢} = ٧$

الحل

بأخذ $\sqrt{\ }$ للطرفين

$س = \pm\sqrt{٧} \in ح$

∴ م.ح = $\{\sqrt{٧} ، -\sqrt{٧}\}$

٢) $س^{٢} - ٢ = ١$

الحل

$س^{٢} = ١ + ٢$ ∴ $س^{٢} = ٣$

بأخذ $\sqrt{\ }$ للطرفين

∴ $س = \pm\sqrt{٣}$

∴ م.ح = $\{\pm\sqrt{٣}\}$

٣) $س^{٣} - ١ = ٨$

الحل

$س^{٣} = ٨ + ١$ $س^{٣} = ٩$

بأخذ $\sqrt[٣]{\ }$ للطرفين

∴ $س = \sqrt[٣]{٩}$

∴ م.ح = $\{\sqrt[٣]{٩}\}$

٤) $س^{٣} - ٣ = ٢٤$

الحل

$س^{٣} = ٢٤ + ٣$

بأخذ $\sqrt[٣]{\ }$

$س^{٣} = ٢٧$

$س = \sqrt[٣]{٢٧} = ٣$

∵ ٣ ∉ ح

∴ م.ح = ∅

مثال ٨ أكمل

١) مربع مساحته ٥ فإن طول ضلعه = ... $\sqrt{٥}$

٢) مكعب حجمه = ٩ سم³ فإن طول حرفه = $\sqrt[٣]{٩}$

تذكرة

طول ضلع المربع = $\sqrt{\text{المساحة}}$

طول حرف المكعب = $\sqrt[٣]{\text{الحجم}}$

الواجب

١ أكمل بوضع ∈ أو ∉

① $-٢ \in$ ...
② ١٫٣ ∈ ---
③ $\pi \in$ ...
④ $\frac{٢٢}{٧} \in$ ---
⑤ ٣٫١٤ ∈ ---
⑥ $|-٧| \in$ ---
⑦ $\sqrt{٥} \in$ ...
⑧ $\sqrt{٩} \in$ ---
⑨ $\sqrt[٣]{٨} \in$ ---
⑩ $\sqrt{٨} \in$ ---
⑪ صفر ∈ ---
⑫ ١٫٠٩ ∈ ---

٢ أوجد عددين صحيحين متتاليين ينحصر بينهما كلاً من

① $\sqrt{٣}$
② $\sqrt{١١}$
③ $\sqrt{١٥}$
④ $\sqrt[٣]{٢٠}$

٣ اثبت أن

① $\sqrt{٢}$ ينحصر بين ١٫٤ ، ١٫٥
② $\sqrt{١٠}$ لا ينحصر بين ٣٫١ ، ٣٫٢

٤ عين على خط الأعداد النقطة التي تمثل

① $\sqrt{٣}$
② $\sqrt{٥}$
③ $-\sqrt{١١}$
④ $١-\sqrt{٢}$

٥ أوجد في ح مجموعة حل

① $س^٢ = ١٠$
② $س^٢ - ٣ = ٢$
③ $(س - ١)^٢ = ٤$
④ $س^٣ - ٣ = ٥$

٦ أكمل

① مربع طول ضلعه = $\sqrt{٢}$ سم فإن مساحته = ---
② مربع مساحته = $\sqrt{٧}$ سم² فإن طول ضلعه = ----
③ مكعب حجمه $\sqrt{٢٥}$ سم³ فإن طول حرفه = ---- ، ∈ ---
④ ن ∩ ن' = ----
⑤ ن ∪ ن' = ----

٧ أختر الإجابة الصحيحة

① العدد غير النسبي المحصور بين ٢ ، ٣ هو ...
($\sqrt{١٠}$ ، $\sqrt{٧}$ ، ٢٫٥ ، $\sqrt{٣}$)
② المربع الذي طول ضلعه $\sqrt{٣}$ تكون مساحته ...
($٤\sqrt{٣}$ ، ٩ ، ٣ ، ٦)
③ المربع الذي مساحته ١٠ سم² يكون طول ضلعه ...
(٥ ، −٥ ، $\sqrt{١٠}$ ، $-\sqrt{١٠}$)

الوحدة الأولى

٣ مجموعة الأعداد الحقيقية ح

لاحظ أن

$\text{ط} \subset \text{ص} \subset \text{ن} \subset \text{ح}$

وكذلك $\text{ن}' \subset \text{ح}$

$\therefore \text{ن} \cup \text{ن}' = \text{ح}$

ملاحظات هامة

١) مجموعة الأعداد الحقيقية (ح) هى المجموعة الناتجة من اتحاد الأعداد النسبية ن وغير النسبية ن'

٢) $\text{ح} = \text{ح}^{+} \cup \{0\} \cup \text{ح}^{-}$

٣) الصفر ليس موجب وليس سالب

٤) ح^{+} مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة وهى كل الأعداد الأكبر من الصفر

$\{\text{س} : \text{س} \in \text{ح} ، \text{س} > 0\}$

٥) ح^{-} مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة

$\{\text{س} : \text{س} \in \text{ح} ، \text{س} < 0\}$

٦) $\text{ح}^{+} \cap \text{ح}^{-} = \phi$

٧) $\text{ح}^{+} \cup \text{ح}^{-} = \text{ح}^{*}$ ← ح ستار

٨) ح^{*} مجموعة الأعداد الحقيقية غير الصفرية

٩) $\text{ح}^{*} = \text{ح} - \{0\} = \text{ح}^{+} \cup \text{ح}^{-}$

١٠) الصفر أكبر من أى عدد سالب والصفر أصغر من أى عدد موجب

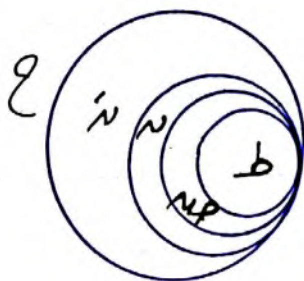
١١) مجموعة الأعداد الحقيقية غير الموجبة

$\text{ح}^{-} \cup \{0\}$ = يعنى السالبة ومعهم الصفر

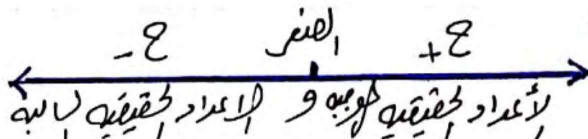
١٢) مجموعة الأعداد الحقيقية غير السالبة

$\text{ح}^{+} \cup \{0\}$ = يعنى الموجبة ومعهم الصفر

١٣)



١٤)



الفكرة الأولى
الترتيب في ح

مثال ١ رتب تصاعدياً "يعني من الصغير للكبير"

$\sqrt{٧٥}$ ، $\sqrt{٦٨}$ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، $-\sqrt{٣٢}$ ، ٧ ، -٨

الحل

الأعداد الموجبة $\sqrt{٧٥}$ ، $\sqrt{٦٨}$ ، ٧

$\because ٧ = \sqrt{٤٩}$ $\therefore$

$\sqrt{٤٩} < \sqrt{٦٨} < \sqrt{٧٥}$ (١)

الأعداد السالبة $-\sqrt{٤٥}$ ، -٨ ، $-\sqrt{٣٢}$

$\because ٨ = \sqrt{٦٤}$

$\therefore -\sqrt{٦٤} < -\sqrt{٤٥} < -\sqrt{٣٢}$ (٢)

$\therefore -\sqrt{٦٤} < -\sqrt{٤٥} < -\sqrt{٣٢} < \sqrt{٤٩} < \sqrt{٦٨} < \sqrt{٧٥}$

$\therefore -٨ < -\sqrt{٤٥} < -\sqrt{٣٢} < ٧ < \sqrt{٦٨} < \sqrt{٧٥}$

مثال ٢ رتب تنازلياً "يعني من الكبير للصغير"

$\sqrt{٦٢}$ ، ٨ ، $-\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{٧٠}$

الحل

الأعداد الموجبة $\sqrt{٦٢}$ ، $\sqrt{٦٤}$ ، $\sqrt{٧٠}$

$\therefore \sqrt{٧٠} > \sqrt{٦٤} > \sqrt{٦٢}$

$\therefore \sqrt{٧٠} > \sqrt{٦٤} > \sqrt{٦٢} > -\sqrt{٥٠}$

$\therefore \sqrt{٧٠} > ٨ > \sqrt{٦٢} > -\sqrt{٥٠}$

مثال ٣ اكتب ثلاثة أعداد غير نسبية تنحصر بين ٥ ، ٦

الحل

$(٥)^٢ = ٢٥$ $\qquad$ $(٦)^٢ = ٣٦$

وبين ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ...

$٢٥ < ٢٦ < ٢٧ < ٢٨ < ٣٦$

$٥ < \sqrt{٢٦} < \sqrt{٢٧} < \sqrt{٢٨} < ٦$

$\therefore$ الأعداد غير النسبية المطلوبة هي

$\sqrt{٢٦}$ ، $\sqrt{٢٧}$ ، $\sqrt{٢٨}$

مثال ٤ اكتب ثلاثة أعداد غير نسبية تنحصر بين ٩ ، ١٠

الحل

$(٩)^٢ = ٨١$ $\qquad$ $(١٠)^٢ = ١٠٠$

$٨١ < ٨٢ < ٨٣ < ٨٤ < ١٠٠$

$٩ < \sqrt{٨٢} < \sqrt{٨٣} < \sqrt{٨٤} < ١٠$

$\therefore$ الأعداد غير النسبية المطلوبة هي

$\sqrt{٨٢}$ ، $\sqrt{٨٣}$ ، $\sqrt{٨٤}$

الفكرة الثانية
حل المعادلات فى ح

مثال ٥ حل المعادلات التالية فى ح

١) $س^٢ - ٥ = ٠$

الحل

$س^٢ = ٥$ بأخذ √

∴ $س = \pm \sqrt{٥}$

∴ م.ح = $\{\pm \sqrt{٥}\}$

٢) $س(س^٣ + ٧) = ٠$

الحل

إما س = ٠

أو $س^٣ + ٧ = ٠$ وضعها $س^٣ = -٧$

∴ $س = \sqrt[٣]{-٧}$

∴ م.ح = $\{٠ ، \sqrt[٣]{-٧}\}$

٣) $س^٢ + ١ = ٠$

الحل

$س^٢ = -١$ بأخذ √

∴ $س = \pm \sqrt{-١}$ مرفوض

∴ م.ح = $\emptyset$

لأنه لا يوجد جذر تربيعي للعدد السالب

الواجب

١ أكمل

1) ن ∩ ن = ... ، ن ∪ ن = ...
2) ح = ... ∪ .... ∪ ....
3) $ح^+ ∪ ح^- = ...$ ، $ح^+ ∩ ح^- = ...$
4) ح − ن = ... ، ح − ن = ...
5) $ح^+ ∪ \{٠\}$ تسمى ....
6) $ح^- ∪ \{٠\}$ تسمى ....

٢ رتب تصاعدياً

1) $\sqrt{٢٧}$ ، $-\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، ٦ ، ٥,٦ ، $\sqrt[٣]{-١}$
2) $\sqrt{٨}$ ، $-\sqrt{٣}$ ، $\sqrt{١٥}$ ، $\sqrt[٣]{١٢٥}$ ، $-\sqrt{٤٩}$ ، ٣

٣ رتب تنازلياً

1) $\sqrt{٦٢}$ ، ٨ ، $-\sqrt{٥٠}$ ، $\sqrt{٧٠}$
2) $\sqrt{٦٢}$ ، $-\sqrt{٥}$ ، $\sqrt[٣]{٦٤}$ ، ١٦ ، صفر ، -١٨

٤ اكتب ثلاثة أعداد غير نسبية تنحصر بين

٦ ، ٧ ١١ ، ١٢

٥ حل المعادلات التالية فى ح

1) $س^٢ - ١ = ٦$
2) $س(س^٢ - ١) = ٠$
3) $س^٣ + ١ = ٩$
4) $س^٢ - ٣ = ٠$
5) $س^٢ + ٤ = ٠$

العمليات على الفترات

الفترة هى مجموعة حل لمتباينة فى ح

ملحوظات

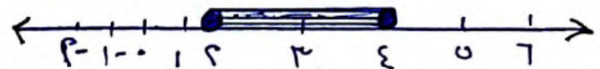
١) عند كتابة الفترة نكتب فى العدد الأصغر فى بداية الفترة

٢) العدد -∞ يكتب دائماً فى أول الفترة
العدد ∞ يكتب دائماً فى آخر الفترة
ويكونوا مفتوحين

أولاً الفترات المحدودة

١) الفترة المغلقة [أ ، ب]

إذا كانت {س : س ∈ ح ، ٢ ≤ س ≤ ٤}
∴ س = [٢ ، ٤]



٢) الفترة المفتوحة]أ ، ب[

إذا كانت س = {س : س ∈ ح ، -١ < س < ٢}
∴ س =]-١ ، ٢[



٣) الفترة النصف مفتوحة [النصف مغلقة]

أ) س = {س : س ∈ ح ، -١ < س ≤ ٢}
س =]-١ ، ٢]

ب) س = {س : س ∈ ح ، -١ ≤ س < ٢}
س = [-١ ، ٢[

ملاحظات

ايه الفرق بين [٣ ، ٥] ، {٣ ، ٥}

دى الفترة المغلقة ٣ ، ٥ يعنى فيها ٣ ، ٥ وكل الأعداد الحقيقية اللى بينهم

إنما دى المجموعة ٣ ، ٥ مفيهاش غير العنصرين ٣ ، ٥ فقط

وعلى فكرة

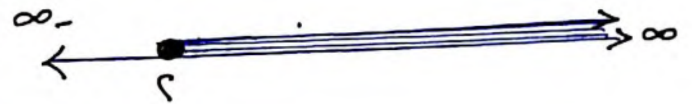
[٣ ، ٥] - {٣ ، ٥} =]٣ ، ٥[

[١ ، ٧] - {١ ، ٧} =]١ ، ٧[

ثانياً الفترات غير المحدودة

(١) س = {س : س ∈ ح ، س ≥ ٢}

س = [٢ ، ∞[



(٢) س = {س : س ∈ ح ، س ≤ ٣}

س =]-∞ ، ٣]



(٣) س = {س : س ∈ ح ، س > ١}

س =]١ ، ∞[

-∞ ١ ∞

ملاحظات هامة

(١) ح =]-∞ ، ∞[

(٢) ح+ =]٠ ، ∞[

(٣) ح- =]-∞ ، ٠[

(٤) لاحظ أن الصفر ليس موجب وليس سالب

(٥) مجموعة الأعداد غير الموجبة =]-∞ ، ٠]

(٦) مجموعة الأعداد غير السالبة [٠ ، ∞[

(٧) ح* = ح - {٠}

(٨) ٣ ∈ [٣ ، ٥]

(٩) ٣ ∉]٣ ، ٥]

(١٠) {٤ ، ٧} ⊂ [٤ ، ٧]

(١١) [٤ ، ٧] - {٤ ، ٧} =]٤ ، ٧[

(١٢)]١ ، ٥[∪ {١ ، ٥} = [١ ، ٥]

((نصيحة))

تجنبوا شرب البيبسي على الريق

حمدي شلبي شاب عنده ٢٣ سنة شرب بيبسي على الريق ومات بعدها بـ ٤٦ سنة في حادثة موتوسيكل

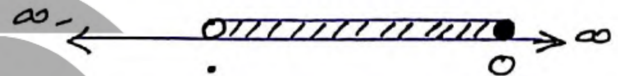
الفكرة الأولى
مسائل سهلة

مثال ١ اكتب كلاً من المجموعات التالية على صورة فترة ثم مثلها على خط الأعداد.

① {س : س ∈ ح ، ٠ > س ≥ ٥}

الحل

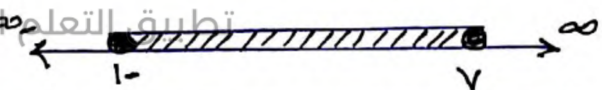
س =]٠ ، ٥]



② {س : س ∈ ح ، -١ ≤ س ≤ ٧}

الحل

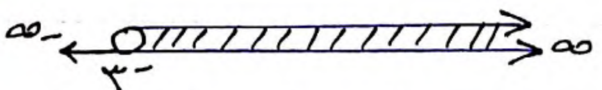
س = [-١ ، ٧]



③ {س : س ∈ ح ، س > -٣}

الحل

س =]-٣ ، ∞[

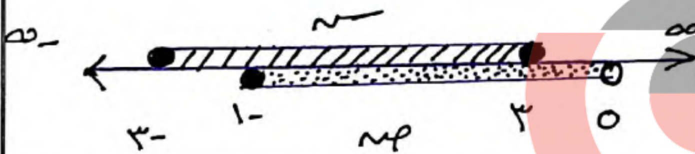


الفكرة الثانية
العمليات على الفترات

مثال ٢ إذا كانت س = [-٣ ، ٣] ، ص = [-١ ، ٥[فأوجد مستعيناً بخط الأعداد

① س ∪ ص ② س ∩ ص
③ س - ص ④ ص - س

الحل



① س ∪ ص : س اتحاد ص
يعني كل اللي في س واللي في ص
= [-٣ ، ٥[

② س ∩ ص : س تقاطع ص
يعني المشترك بين س و ص
= [-١ ، ٣]

③ س - ص : س فرق ص
يعني اللي موجود في س وغير موجود في ص
= [-٣ ، -١[

متنساش في الفرق تعكس الأقواس المشتركة

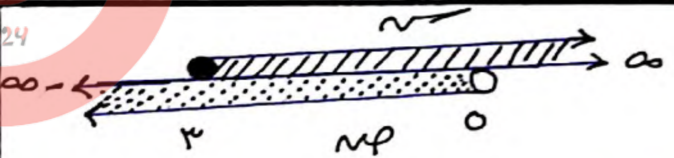
٤) ص − س : ما في ص وفي غير س
الموجود في ص وغير موجود في س
[٣ ، ٥[
← نكتبها ٣ لانها مشتركة

مثال ٤

إذا كانت س = [٣ ، ∞[، ص =]−∞ ، ٥[
فأوجد مستعيناً بخط الأعداد

١) س ∩ ص ٢) س ∪ ص
٣) س − ص ٤) ص − س
٥) سَ ٦) صَ

الحل



١) س ∩ ص = [٣ ، ٥[
٢) س ∪ ص =]−∞ ، ∞[= ح
٣) س − ص = [٥ ، ∞[
٤) ص − س =]−∞ ، ٣[
٥) سَ = مكملة س كل الخط ماعدا س
=]−∞ ، ٣[
٦) صَ = مكملة ص كل الخط ماعدا ص
[٥ ، ∞[



١) أكمل

١)]−∞ ، ∞[= ....
٢) ح+ = ... ح− = ...
٣) [−١ ، ٤] − {−١ ، ٤} = ...
٤) {٢ ، ٧} ∪]٢ ، ٧[= ....
٥) مجموعة الأعداد غير الموجبة = ...
٦) " " غير السالبة = ...
٧) ٥ .... [٥ ، ٧]
٨) ٣ ....]٢ ، ٣[

٢) اكتب على شكل فترة ومثلها على خط الأعداد

١) س = {س : س ∈ ح ، −١ ≤ س ≤ ١}
٢) س = {س : س ∈ ح ، ٢ < س < ٧}
٣) س = {س : س ∈ ح ، −٣ < س ≤ ١}
٤) س = {س : س ∈ ح ، س ≥ ٢}
٥) س = {س : س ∈ ح ، س < ٣}

٣) إذا كانت س = [−٣ ، ٢] ، ص = [٠ ، ٥]
فأوجد مستعيناً بخط الأعداد

١) س ∩ ص ٢) س ∪ ص
٣) س − ص ٤) ص − س
٥) سَ ٦) صَ

الوحدة الأولى

٥ العمليات على الأعداد الحقيقية

ملاحظات

١) العنصر المحايد الجمعي في ح هو الصفر

٢) العنصر المحايد الضربي في ح هو الواحد

٣) علشان تجيب المعكوس الجمعي تغير الإشارة

٤) علشان تجيب المعكوس الضربي تقلب الكسر

الفكرة الأولى
مسائل سهلة

مثال ١ أوجد ناتج

١) $2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

٢) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

٣) $7\sqrt{5} - 3\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

٤) $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3\times3} = \sqrt{9} = 3$

٥) $\sqrt{5} \times \sqrt{5} = 5$

٦) $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$

٧) $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$

٨) $2\sqrt{3} \times 5\sqrt{2} = 10\sqrt{6}$

٩) $\frac{8\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{\frac{6}{3}} = 4\sqrt{2}$

١٠) $\frac{15\sqrt{10}}{5\sqrt{5}} = 3\sqrt{2}$

مثال ٢ أوجد المعكوس الجمعي لكل من

١) $\sqrt{3} \Longrightarrow -\sqrt{3}$

٢) $-\sqrt{5} \Longrightarrow \sqrt{5}$

٣) $1+\sqrt{2} \Longrightarrow -1-\sqrt{2}$

٤) $-3-\sqrt{7} \Longrightarrow 3+\sqrt{7}$

٥) $-2+\sqrt{8} \Longrightarrow 2-\sqrt{8}$

٦) $5-\sqrt{3} \Longrightarrow -5+\sqrt{3} = \sqrt{3}-5$

الفكرة الثانية
سهلة كمان

مثال ٣ اكتب بحيث يكون المقام عدداً صحيحاً

١) $\frac{9}{\sqrt{3}} \Longrightarrow \frac{9\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}$

٢) $\frac{6}{\sqrt{2}} \Longrightarrow \frac{6\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

(٣) $\frac{3}{\sqrt{7}} \Leftarrow \frac{3\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}\times\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$

(٤) $\frac{-5}{2\sqrt{5}} \Leftarrow \frac{-5\times\sqrt{5}}{2\times\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{-5\sqrt{5}}{5\times 2} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$

مثال ٤ أوجد المعكوس الضربى

بتقلب الكسر

(١) $\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$

(٢) $\frac{1}{\sqrt{5}} \Leftarrow \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

(٣) $\frac{-3}{\sqrt{2}} \Leftarrow \frac{\sqrt{2}}{-3} = -\frac{\sqrt{2}}{3}$

(٤) $\frac{\sqrt{6}}{2} \Leftarrow \frac{2\times\sqrt{6}}{\sqrt{6}\times\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

(٥) $\frac{\sqrt{5}}{10} \Leftarrow \frac{10\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

مثال ٥ إذا كانت $\text{س} = 5\sqrt{3} - 2$

و $\text{ص} = 5\sqrt{3} + 2$

فأوجد قيمة

(١) $\text{س} + \text{ص}$

(٢) $\text{س} - \text{ص}$

(٣) $\text{س}^2 + 2\text{س}\text{ص} + \text{ص}^2$

الحل

(١) $\text{س} + \text{ص} = 5\sqrt{3} - 2 + 5\sqrt{3} + 2$

$= 5\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

(٢) $\text{س} - \text{ص} = 5\sqrt{3} - 2 - (5\sqrt{3} + 2)$

$= 5\sqrt{3} - 2 - 5\sqrt{3} - 2$

$= -2 - 2 = -4$

(٣) $\text{س}^2 + 2\text{س}\text{ص} + \text{ص}^2 = (\text{س} + \text{ص})^2$

$= (10\sqrt{3})^2 = 100 \times 3 = 300$

مثال ٦ إذا كانت $\text{س} = 2\sqrt{5} + 1$

$\text{ص} = 2\sqrt{5} - 1$

فأوجد

(١) $\text{س} + \text{ص}$

(٢) $\text{س} - \text{ص}$

(٣) $\text{س}^2 + 2\text{س}\text{ص} + \text{ص}^2$

(٤) $\text{س}^2 - 2\text{س}\text{ص} + \text{ص}^2$

الحل

(١) $\text{س} + \text{ص} = 2\sqrt{5} + 1 + 2\sqrt{5} - 1 = 4\sqrt{5}$

(٢) $\text{س} - \text{ص} = 2\sqrt{5} + 1 - (2\sqrt{5} - 1)$

$= 2\sqrt{5} + 1 - 2\sqrt{5} + 1 = 2$

(٣) $\text{س}^2 + 2\text{س}\text{ص} + \text{ص}^2 = (\text{س} + \text{ص})^2$

$= (4\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$

(٤) $\text{س}^2 - 2\text{س}\text{ص} + \text{ص}^2 = (\text{س} - \text{ص})^2$

$= (2)^2 = 4$

ملحوظة مهمة جداً

١) $(س + ص)(س - ص) = س^2 - ص^2$

٢) $(س + ص)^2 = س^2 + ٢س ص + ص^2$

٣) $(س - ص)^2 = س^2 - ٢س ص + ص^2$

مثال ٧ أوجد في أبسط صورة

١) $٢(\sqrt{٣} - \sqrt{٧}) = ٢\sqrt{٣} - ٢\sqrt{٧}$

٢) $٣(\sqrt{٢} + ٥\sqrt{٣}) = ٣\sqrt{٢} + ١٥\sqrt{٣}$

٣) $\sqrt{٢}(٣ + \sqrt{٥}) = ٣\sqrt{٢} + \sqrt{١٠}$

٤) $-\sqrt{٣}(-٥ - \sqrt{٣}) = ٥\sqrt{٣} + ٣$

٥) $(٢\sqrt{٣})^2 = (٢)^2 \times (\sqrt{٣})^2 = ٤ \times ٣ = ١٢$

٦) $(٢\sqrt[٣]{٥})^3 = (٢)^3 \times (\sqrt[٣]{٥})^3 = ٨ \times ٥ = ٤٠$

٧) $\frac{\sqrt{٢} + ٣}{\sqrt{٢}} \Leftarrow \frac{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢} + ٣\sqrt{٢}}{\sqrt{٢} \times \sqrt{٢}} = \frac{٢ + ٣\sqrt{٢}}{٢}$

الواجب

١ أكمل

١) $٢\sqrt{٣} + ٥\sqrt{٣} =$

٢) $٣\sqrt{٧} - \sqrt{٧} =$.

٣) العنصر المحايد الجمعي في ح هو ...

٤) العنصر المحايد الضربي في ح هو ...

٥) المعكوس الجمعي لـ $\sqrt{٢} - \sqrt{٣}$ هو ...

٦) المعكوس الضربي لـ $\frac{\sqrt{٦}}{٣}$ هو ...

٧) $(٢\sqrt{٥})^2 =$ ....

٨) $(٢\sqrt[٣]{٣})^3 =$ ....

٢ اختصر

١) $٢\sqrt{٧} - ٣\sqrt{٢} + \sqrt{٧} + ٥\sqrt{٧}$

٢) $٢\sqrt{٣} + ٥ + \sqrt{٣} - ٦$

٣) $\sqrt{٣} \times \sqrt{٥}$

٤) $\sqrt{٢}(\sqrt{٧} + ٢)$

٥) $\sqrt{٥}(٣ - \sqrt{٥})$

٦) $(\sqrt{٢} + ١)(\sqrt{٢} - ١)$

٣ اجعل المقام عدداً صحيحاً

١) $\frac{٥}{\sqrt{١٠}}$

٢) $\frac{٨}{\sqrt{٢}}$

٣) $\frac{-٦}{\sqrt{٣}}$

٤) $\frac{٢٥}{٢\sqrt{١٠}}$

٦ العمليات على الجذور التربيعية

الوحدة الأولى

لاحظ أن

1. $\sqrt{8} = \sqrt{2\times4} = 2\sqrt{2}$
2. $\sqrt{12} = \sqrt{3\times4} = 2\sqrt{3}$
3. $\sqrt{20} = \sqrt{5\times4} = 2\sqrt{5}$
4. $\sqrt{45} = \sqrt{5\times9} = 3\sqrt{5}$
5. $\sqrt{48} = \sqrt{3\times16} = 4\sqrt{3}$
6. $\sqrt{28} = \sqrt{7\times4} = 2\sqrt{7}$
7. $\sqrt{27} = \sqrt{3\times9} = 3\sqrt{3}$
8. $\sqrt{75} = \sqrt{3\times25} = 5\sqrt{3}$
9. $\sqrt{40} = \sqrt{4\times10} = 2\sqrt{10}$
10. $\sqrt{54} = \sqrt{6\times9} = 3\sqrt{6}$

مثال ١

اختصر لأبسط صورة.

(١) $\sqrt{45} - 2\sqrt{20} + 2\sqrt{5}$

الحل

$\sqrt{5\times9} - 2\sqrt{5\times4} + 2\sqrt{5}$

$3\sqrt{5} - 2\times2\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

$3\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

$(3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) - (4\sqrt{5}) = \sqrt{5}$

(٢) $\sqrt{75} - 2\sqrt{12} + 3\sqrt{3}$

الحل

$\sqrt{3\times25} - 2\sqrt{3\times4} + 3\sqrt{3}$

$5\sqrt{3} - (2\times2)\sqrt{3} + 3\sqrt{3}$

$5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

(٣) $2\sqrt{5} + 4\sqrt{20} - 5\sqrt{\frac{1}{5}}$

الحل

$2\sqrt{5} + 4\sqrt{4\times5} - \sqrt{(5)^2\times\frac{1}{5}}$

$2\sqrt{5} + 4\times2\sqrt{5} - \sqrt{\frac{25}{5}}$

$2\sqrt{5} + 8\sqrt{5} - \sqrt{5} = 10\sqrt{5} - \sqrt{5}$

$= 9\sqrt{5}$

(٤) $\sqrt{32} - \sqrt{50} + 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

الحل

$\sqrt{2\times16} - \sqrt{2\times25} + 2\times3\sqrt{\frac{1}{2}}$

$4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{\frac{(2)^2}{2}}$

$4\sqrt{2} - 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 7\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

$= 2\sqrt{2}$

صدقنا فهم حاجة ؟

⑤ $٢\sqrt{٢٧} - ٣\sqrt{\frac{١}{٣}} - ٦\sqrt{\frac{١}{٣}}$

الحل

$٢\sqrt{٣ \times ٩} - \sqrt{(٣)^٢ \times \frac{١}{٣}} - ٢ \times ٣\sqrt{\frac{١}{٣}}$

$(٢ \times ٣)\sqrt{٣} - \sqrt{٣} - ٢\sqrt{\frac{(٣)^٢}{٣}}$

$٦\sqrt{٣} - \sqrt{٣} - ٢\sqrt{٣} = ٦\sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣}$

$= ٣\sqrt{٣}$

مثال ٢ أوجد ناتج

① $(\sqrt{٥} - \sqrt{٣})(\sqrt{٥} + \sqrt{٣})$

الحل

تذكر أن $(س - ص)(س + ص) = س^٢ - ص^٢$

$= (\sqrt{٥})^٢ - (\sqrt{٣})^٢ = ٥ - ٣ = ٢$

② $(\sqrt{٢} + \sqrt{٦})^٢$

الحل

تذكر أن $(س + ص)^٢ = س^٢ + ٢ س ص + ص^٢$

$= (\sqrt{٢})^٢ + ٢ \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٦} + (\sqrt{٦})^٢$

$٢ + ٢ \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٢} \times \sqrt{٣} + ٦$

$٢ + ٢ \times ٢\sqrt{٣} + ٦$

$٢ + ٤\sqrt{٣} + ٦ = ٨ + ٤\sqrt{٣}$



① اختصر لأبسط صورة

1. $\sqrt{١٨} + \sqrt{٥٠}$
2. $\sqrt{٢٠} - \sqrt{٤٥}$
3. $٣\sqrt{٢} + \sqrt{٨} - \sqrt{١٨}$
4. $٢\sqrt{٥} + ٦\sqrt{\frac{١}{٣}} - \sqrt{١٢} - ٥\sqrt{\frac{١}{٥}}$
5. $\sqrt{٥} \times ٢\sqrt{١٠}$
6. $٢\sqrt{٣} \times ٥\sqrt{٢}$
7. $٢\sqrt{١٨} \times ٣\sqrt{٢}$
8. $\sqrt{٦}(\sqrt{٣} - \sqrt{٢})$
9. $(\sqrt{٧} - \sqrt{٥})(\sqrt{٧} + \sqrt{٥})$

② أكمل

1. $\sqrt{٥}\sqrt{٥} =$ ---
2. $\frac{٨\sqrt{١٠}}{٢\sqrt{٥}} =$ ---
3. إذا كانت $س^٢ = ٥$ فإن $س =$ --
4. $\sqrt{٥}$ ، $\sqrt{٢٠}$ ، $\sqrt{٤٥}$ ، $\sqrt{٨٠}$ ، ---- بنفس النمط

اللى هيحل الواجب له جائزة قيمة ؟

الوحدة الأولى

٧ العددان المترافقان

العدد		المرافق
$\sqrt{5}+\sqrt{2}$	←	$\sqrt{5}-\sqrt{2}$
$\sqrt{7}-\sqrt{3}$	←	$\sqrt{7}+\sqrt{3}$
$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	←	$\sqrt{3}+\sqrt{2}$

ملحوظة

١) مجموع العددين المترافقين = ٢ × الحد الأول

٢) حاصل ضرب العددين المترافقين = $(\text{الحد الأول})^2 - (\text{الحد الثاني})^2$

العدد	مرافقه	مجموعهم	حاصل ضربهم
$\sqrt{3}+\sqrt{2}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	$(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2=3-2=1$
$\sqrt{5}-\sqrt{3}$	$\sqrt{5}+\sqrt{3}$	$2\sqrt{5}$	$5-3=2$
$\sqrt{7}-3$	$\sqrt{7}+3$	$2\sqrt{7}$	$(\sqrt{7})^2-(3)^2=7-9=-2$

مثال ١ أختصر لأبسط صورة

$$(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}+\sqrt{3})=2\sqrt{5}$$

١) $(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}+\sqrt{2})$

الحل

$$=(\sqrt{7})^2-(\sqrt{2})^2=7-2=5$$

٢) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{5})$

الحل

$$(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2$$
$$=4\times3-5=12-5=7$$

مثال ٢ اكتب فى أبسط صورة

١) $\dfrac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

الحل

بالضرب × مرافقه للمقام $(\sqrt{7}+\sqrt{3})$

$$\frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})}=\frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{(7-3)}$$

$$=\frac{4(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}=\sqrt{7}+\sqrt{3}$$

٢) $\dfrac{12}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

الحل

$$\frac{12(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})}=\frac{12(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2}$$

$$\frac{\cancel{12}^{3}(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{\cancel{4}} = 3(\sqrt{6}+\sqrt{2})$$

مثال ٢ إذا كانت $س = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ ، $ص = \sqrt{5}-\sqrt{3}$ فأثبت أن س ، ص عددان مترافقان ثم أوجد قيمة $س^2 + 2س ص + ص^2$

الحل

$$س = \frac{2 \times (\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{5-3}$$

$$س = \frac{\cancel{2}(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\cancel{2}} = \sqrt{5}+\sqrt{3}$$

$\because$ $ص = \sqrt{5}-\sqrt{3}$

$\therefore$ س ، ص عددان مترافقان

المقدار

$$س^2 + 2س ص + ص^2 = (س + ص)^2$$

$$= (\cancel{\sqrt{3}}+\sqrt{5}+\sqrt{5}-\cancel{\sqrt{3}})^2$$

$$= (2\sqrt{5})^2 = 4 \times 5 = 20$$

تدريب إذا كانت $س = \frac{4}{3+\sqrt{5}}$ ، $ص = 3+\sqrt{5}$

فأثبت أن س ، ص مترافقان ثم أوجد قيمة $س^2 + 2س ص + ص^2$

الواجب

١ إذا كانت $س = \frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ ، $ص = \sqrt{7}-\sqrt{3}$ أثبت أن س ، ص عددان مترافقان ثم أوجد قيمة $س^2 + 2س ص + ص^2$

٢ اجعل المقام عدداً نسبياً

(١) $\frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ (٢) $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

٣ أكمل

(١) العدد $3+\sqrt{2}$ مرافقه .... وحاصل ضربهما ....

(٢) مرافق العدد $\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ هو ....

(٣) المعكوس الضربي للعدد $(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ فى أبسط صورة هو

(٤) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{2}) = ...$

(٥) $(\sqrt{8}-3)(\sqrt{8}+3) = ...$

(٦) $(5-2\sqrt{3})(5+2\sqrt{3}) = ...$

(٧) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}+\sqrt{3}) = ...$

(٨) $(\sqrt{5}-\sqrt{3})-(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = ...$

العمليات على الجذور التكعيبية

٨ الوحدة الأولى

لاحظ أن

$\sqrt[٣]{١٦} = \sqrt[٣]{٢ \times ٨} = ٢\sqrt[٣]{٢}$

$\sqrt[٣]{٢٤} = \sqrt[٣]{٣ \times ٨} = ٢\sqrt[٣]{٣}$

$\sqrt[٣]{٥٤} = \sqrt[٣]{٢ \times ٢٧} = ٣\sqrt[٣]{٢}$

$\sqrt[٣]{٨١} = \sqrt[٣]{٣ \times ٢٧} = ٣\sqrt[٣]{٣}$

تذكر أن

$\sqrt{١} = ١$	$\sqrt[٣]{١} = ١$
$\sqrt{٤} = ٢$	$\sqrt[٣]{٨} = ٢$
$\sqrt{٩} = ٣$	$\sqrt[٣]{٢٧} = ٣$
$\sqrt{١٦} = ٤$	$\sqrt[٣]{٦٤} = ٤$
$\sqrt{٢٥} = ٥$	$\sqrt[٣]{١٢٥} = ٥$
$\sqrt{١٠٠} = ١٠$	$\sqrt[٣]{١٠٠٠} = ١٠$

مثال ١ اختصر لأبسط صورة

١ $\sqrt[٣]{٣} + \sqrt[٣]{٢٤} - \sqrt[٣]{٨١}$

الحل

$\sqrt[٣]{٣} + \sqrt[٣]{٣ \times ٨} - \sqrt[٣]{٣ \times ٢٧}$

$= \sqrt[٣]{٣} + ٢\sqrt[٣]{٣} - ٣\sqrt[٣]{٣}$

$= ٣\sqrt[٣]{٣} - ٣\sqrt[٣]{٣} =$ صفر

٢ $\sqrt[٣]{٣٢} + ٢\sqrt[٣]{\frac{١}{٢}} - (\sqrt[٣]{-٢})^٢$

الحل

$\sqrt[٣]{٨ \times ٤} + \sqrt[٣]{(٢)^٣ \times \frac{١}{٢}} - \sqrt[٣]{(-٢)^٢}$

$= ٢\sqrt[٣]{٤} + \sqrt[٣]{٤} - \sqrt[٣]{٤}$

$= ٣\sqrt[٣]{٤} - \sqrt[٣]{٤} = ٢\sqrt[٣]{٤}$

٣ $\sqrt[٣]{٥٤} + ٦\sqrt[٣]{١٦} - ٦\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$

الحل

$\sqrt[٣]{٢ \times ٢٧} + ٦\sqrt[٣]{٢ \times ٨} - ٣ \times ٢\sqrt[٣]{\frac{١}{٤}}$

$= ٣\sqrt[٣]{٢} + (٦ \times ٢)\sqrt[٣]{٢} - ٣\sqrt[٣]{\frac{(٢)^٣}{٤}}$

$= ٣\sqrt[٣]{٢} + ١٢\sqrt[٣]{٢} - ٣\sqrt[٣]{٢}$

$= ١٥\sqrt[٣]{٢} - ٣\sqrt[٣]{٢} = ١٢\sqrt[٣]{٢}$

الواجب

اختصر

١ $\sqrt[٣]{١٢٨} + \sqrt[٣]{١٦} - ٢\sqrt[٣]{٥٤}$

٢ $\sqrt[٣]{٥٤} + ٨\sqrt[٣]{\frac{-١}{٤}} + ٥\sqrt[٣]{١٦}$

٣ $\frac{٧}{٣}\sqrt{١٨} + \sqrt[٣]{٥٤} - ٧\sqrt{٢} + \sqrt[٣]{١٦}$

٤ $\sqrt[٣]{٥٤} + \sqrt[٣]{-٢}$

٩ تطبيقات على الأعداد الحقيقية

الوحدة الأولى

أولاً الدائرة

محيط الدائرة = ٢ π نق وحدة طول

مساحة الدائرة = π نق² وحدة مربعة

مثال دائرة طول قطرها = ٢٠ سم أوجد محيطها ومساحتها (π = ٣,١٤)

الحل

∵ طول القطر = ٢٠ ∴ نق = ١٠ سم

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٣,١٤ × ١٠

= ٦٢,٨ سم

مساحة الدائرة = π نق² = ٣,١٤ × (١٠)²

= ٣١٤ سم²

مثال ٢ دائرة مساحتها ٦٤ π سم² أوجد نق ثم أوجد محيطها (π = ٣,١٤)

الحل

∵ مساحة الدائرة = π نق²

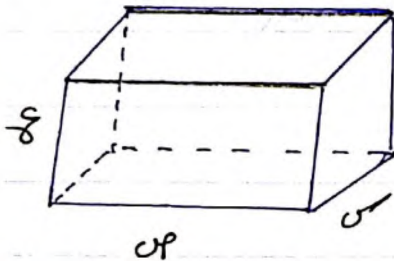
∴ π نق² = ٦٤ π

∴ نق² = ٦٤ ∴ نق = √٦٤ = ٨ سم

محيط الدائرة = ٢ π نق = ٢ × ٣,١٤ × ٨ = ٥٠,٢٤ سم

ثانياً متوازي المستطيلات

هو مجسم له ستة أوجه على شكل مستطيلات وكل وجهين متقابلين متطابقين



١ المساحة الجانبية

= محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢(س + ص) × ع سم²

٢ المساحة الكلية

= المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

= ٢(س ص + ص ع + س ع) سم²

٣ الحجم

= مساحة القاعدة × الارتفاع

= س × ص × ع سم³

مثال ٣ متوازي مستطيلات ابعاده ٢، ٣، ٥ سم أوجد

١ المساحة الكلية ٢ الحجم

الحل

① المساحة الكلية =

$[(5\times2)+(5\times3)+(3\times2)]\times2$

$[10+15+6]\times2$

$=2\times31=62$ سم²

② الحجم =

$2\times3\times5=30$ سم³

مثال ٤ متوازي مستطيلات ابعاده ٣، ٤، ٥ سم

احسب

① المساحة الكلية ② الحجم

الحل

المساحة الكلية = ٢ [ ]

$=2[(3\times5)+(4\times5)+(3\times4)]$

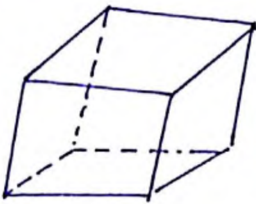
$=2[15+20+12]$

$=2[47]=94$ سم²

الحجم $=3\times4\times5=60$ سم³

من قال سبحان الله وبحمده غرست له نخلة في الجنة





هو مجسم له ستة أوجه على شكل مربع

أو

هو متوازي مستطيلات أطوال احرفه متساوية

① مساحة الوجه الواحد = ل²

② المساحة الجانبية = ٤ ل²

③ المساحة الكلية = ٦ ل²

④ الحجم = ل³

مثال ٥ مكعب طول حرفه = ٢ سم

احسب

① مساحته الجانبية ② الكلية

③ الحجم

الحل

* المساحة الجانبية = ٤ ل²

$=4\times(2)^2=4\times4=16$ سم²

* المساحة الكلية = ٦ ل²

$=6\times(2)^2=6\times4=24$ سم²

* الحجم = ل³ $=(2)^3=8$ سم³

رابعاً: الاسطوانة الدائرية القائمة

هي مجسم له قاعدتان متوازيتان ومتطابقتان وكل منهما على شكل دائرة.



(١) المساحة الجانبية

= محيط القاعدة × الارتفاع

$= 2\pi$ نق ع

(٢) المساحة الكلية

المساحة الجانبية + القاعدتين

$= 2\pi$ نق ع $+ 2\pi$ نق^2

(٣) الحجم

= مساحة القاعدة × الارتفاع

$= \pi$ نق^2 ع

مثال ٦: اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها ١٠ سم، وحجمها ١٥٤٠ سم^3 أوجد مساحتها الكلية ($\pi = \frac{22}{7}$)

الحل

∵ حجم الاسطوانة $= \pi$ نق^2 ع ، ع = ١٠

∴ π نق^2 ع = ١٥٤٠

$1540 = 10 \times$ نق$^2 \times \frac{22}{7}$

$\frac{220}{7}$ نق$^2 = 1540$

∴ نق$^2 = 1540 \times \frac{7}{220} = 49$

∴ نق $= \sqrt{49} = 7$ سم

∴ المساحة الكلية

$= 2\pi$ نق ع $+ 2\pi$ نق^2

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 10 + 2 \times \frac{22}{7} \times (7)^2$

$= 440 + 44 \times 7$

$= 440 + 308 = 748$ سم^2

مثال ٧: اسطوانة دائرية قائمة حجمها = ٣٥٢ سم^3 وارتفاعها ٧ سم أوجد طول نصف قطر قاعدتها $\pi = \frac{22}{7}$

الحل

حجم الاسطوانة $= \pi$ نق^2 ع $= 352$

∴ $\frac{22}{7} \times$ نق$^2 \times 7 = 352$

22 نق$^2 = 352$

∴ نق$^2 = \frac{352}{22} = 16$

∴ نق $= \sqrt{16} = 4$ سم

مثال ٨: أيهما أكبر حجماً: مكعب طول حرفه ١٥ سم أم اسطوانة دائرية قائمة طول قطر قاعدتها ١٤ سم وارتفاعها [illegible] سم؟ $\pi = \frac{22}{7}$

الحل

حجم المكعب = ل^3 $= (15)^3 = 3375$ سم^3

حجم الاسطوانة = π نق٢ ع

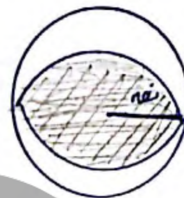
ع = ٢٠ سم   نق = $\frac{١٤}{٢}$ = ٧ سم

∴ π نق٢ ع = $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)٢ × ٢٠

= ٣٠٨٠ سم٣

∴ حجم المكعب أكبر من حجم الاسطوانة





(١) مساحة سطح الكرة

= ٤ π نق٢

(٢) حجم الكرة

= $\frac{٤}{٣}$ π نق٣

مثال ٩ كرة طول نصف قطرها ١٠ سم
احسب مساحة سطحها وحجمها
(π = ٣,١٤)

الحل

مساحة سطح الكرة = ٤ π نق٢

= ٤ × ٣,١٤ × (١٠)٢ = ١٢٥٦ سم٢

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق٣

= $\frac{٤}{٣}$ × ٣,١٤ × (١٠)٣ = ٤١٨٧ تقريبا سم٣

مثال كرة حجمها $\frac{٥٠٠}{٣}$ π سم٣
أوجد طول قطرها

الحل

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ π نق٣

∴ $\frac{٤}{٣}$ π نق٣ = $\frac{٥٠٠}{٣}$ π

نق٣ = $\frac{٥٠٠}{٣}$ × $\frac{٣}{٤}$ = $\frac{٥٠٠}{٤}$

∴ نق٣ = ١٢٥

∴ نق = $\sqrt[٣]{١٢٥}$ = ٥ سم

∴ طول القطر = ١٠ سم

اضحك مع أبو أدهم

واحد عنده قط كل ما يرميه بعيد يرجع

رماه عند الجامع رجع

رماه عند المطعم رجع

رماه عند البحر رجع

الراجل اتعصب وقرر يرميه في الصحرا

وداه وسط الصحرا وسابه

وبعد ساعتين اتصل على مراته قالها القط رجع

قالتله: ايوه رجع من ساعتين وقاعد منتظرك

قالها: اديهولي يمكن يوصفلي الطريق

ربنا يا خوفه



① متوازى مستطيلات ابعاده ٣ ، ٥ ، ٦
احسب مساحته الكلية وحجمه

② مكعب طول حرفه ٥ سم
احسب مساحته الجانبية - مساحته الكلية
حجمه

③ ايهما اكبر حجماً متوازى مستطيلات
ابعاده ٣ ، ٤سم ، ٥سم
أم مكعب طول حرفه ٣سم

④ ايهما اكبر حجماً مكعب مساحته الكلية
٢٩٤ سم² أم متوازى مستطيلات
ابعاده ٧سم ، ٥سم ، ١٠سم

⑤ دائرة طول نصف قطرها ٧سم
اوجد محيطها ومساحتها $(\pi = \frac{22}{7})$

⑥ اسطوانة دائرية قائمة طول نصف
قطر قاعدتها ٧سم وارتفاعها ٦سم
احسب مساحتها الجانبية - الكلية
حجمها

⑦ ايهما اكبر حجماً اسطوانة دائرية
قائمة طول نصف قطر قاعدتها ٧سم
وارتفاعها ٢٠سم أم مكعب طول حرفه ١١سم

⑧ كرة طول قطرها ١٤سم احسب مساحتها
وحجمها $(\pi = \frac{22}{7})$

⑨ كرة حجمها ٤١٨٨ سم³ اوجد
طول نصف قطرها $(\pi = ٣٫١٤١)$

اضحك ع محدش واخد منها حاجه

ليه كلمة **(خمسة)** من أربع حروف
ليه كلمة **(اربعة)** من خمس حروفا
ليه كلمة **(مع بعض)** متفرقة
وكلمة **(متفرقه)** مع بعض
ليه **(الكلمه واحده)** من كلمتين
وليه **(كلمتين)** من كلمه واحده

يا سلام قليل يا مستر لما نتق رايحه

الوحدة الأولى ١٠

حل معادلات ومتباينات الدرجة الأولى فى ح

مثال أوجد م.ح فى ح ثم مثل الحل على خط الأعداد

(١) $\sqrt{2}$ س + ٣ = ٥

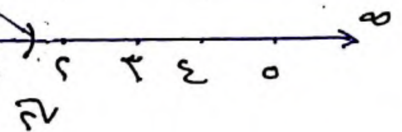
الحل

$\sqrt{2}$ س = ٥ − ٣

$\sqrt{2}$ س = ٢ ÷ $\sqrt{2}$

س = $\frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

∴ م.ح = {$\sqrt{2}$}



(٢) $\sqrt{7}$ س − ٢ = ٥

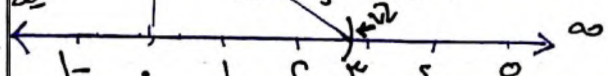
الحل

$\sqrt{7}$ س = ٥ + ٢

$\sqrt{7}$ س = ٧ ÷ $\sqrt{7}$

س = $\frac{7}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{7\sqrt{7}}{7} = \sqrt{7}$

∴ م.ح = {$\sqrt{7}$}



حل انت

(١) $\sqrt{3}$ س − ١ = ٢

(٢) س − $\sqrt{5}$ = ١

(٣) $\sqrt{5}$ س − ١ = ٤

مثال أوجد فى ح مجموعة حل كلاً من المتباينات التاليه ومثل الحل على خط الاعداد

(١) ٢س − ٥ ≤ ٣

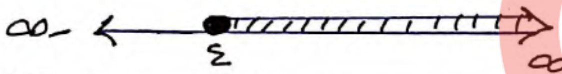
الحل

٢س ≤ ٣ + ٥

٢س ≤ ٨ ÷ ٢

س ≤ ٤

∴ م.ح =]−∞، ٤]



(٢) ٥ − ٤س < −٣

الحل

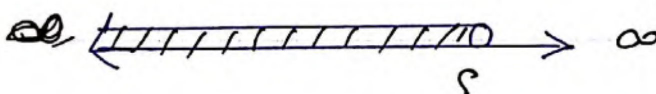
−٤س < −٣ − ٥

−٤س < −٨ ÷ −٤

$\frac{-4}{-4}$س > $\frac{-8}{-4}$ نقسم القسمة على عامل سالب

س > ٢ نغير اتجاه المتباينه

م.ح =]٢، ∞[



③ $-3 < 2س - 1 \leq 5$

الحل

بإضافة +١ لجميع الأطراف

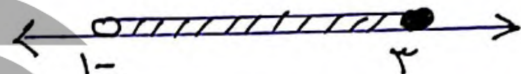
$-3+1 < 2س - 1 + 1 \leq 5 + 1$

$-2 < 2س \leq 6$ ÷٢

$\frac{-2}{2} < س \leq \frac{6}{2}$

$-1 < س \leq 3$

∴ م.ح =]−١، ٣]



④ $5س - 7 \geq 3س + 3$

الحل

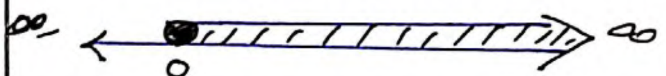
$5س - 3س \geq 3 + 7$

$2س \geq 10$

∴ $س \geq \frac{10}{2}$

∴ $س \geq 5$

∴ م.ح = [٥، ∞[



⑤ $س - 1 < 3س - 3 \leq س + 5$

الحل

بإضافة −س لجميع الأطراف

$س - س - 1 < 3س - س - 3 \leq س - س + 5$

$-1 < 2س - 3 \leq 5$

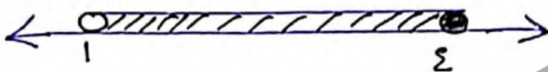
بإضافة +٣ لجميع الأطراف

$-1 + 3 < 2س - 3 + 3 \leq 5 + 3$

$\frac{2}{2} < \frac{2س}{2} \leq \frac{8}{2}$ ÷٢

$1 < س \leq 4$

∴ م.ح =]١، ٤]





① أوجد في ح مجموعة حل المعادلات والمتباينات التالية ومثلها على خط الأعداد

① $5س + 6 = 1$

② $\sqrt{3}س - 1 = 1$

③ $س + 3 \leq 5$

④ $5 - س > 2$

⑤ $3 - 2س \leq 7$

⑥ $5س - 3 < 2س + 9$

⑦ $7س - 12 \geq 5س - 8$

⑧ $4س \leq 5س + 2 \leq 4س + 3$

⑨ $س - 1 \leq 3س - 1 < س + 1$

العلاقة بين متغيرين

الوحدة الثانية ١

الفكرة الأولى

مثال ١: أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق العلاقات التالية

١) س + ص = ٢

الحل

في البداية حاول تخلي ص لوحدها في اليمين

ص = ٢ − س

عندما س = ٠ ∴ ص = ٢ − ٠ = ٢

الأول (٠ ، ٢)

عندما س = ١ ∴ ص = ٢ − ١ = ١

الثاني (١ ، ١)

عندما س = ٢ ∴ ص = ٢ − ٢ = ٠

الثالث (٢ ، ٠)

٢) ص − ٢س = ١

الحل

ص = ١ + ٢س

عندما س = ٠ ∴ ص = ١ + ٢ × ٠ = ١

(٠ ، ١)

عندما س = ١ ∴ ص = ١ + ٢ × ١ = ٣

(١ ، ٣)

عندما س = ٢ ∴ ص = ١ + ٢ × ٢ = ٥

(٢ ، ٥)

مثال ٢: بين أى من الأزواج المرتبة (٠ ، ١) ، (٥ ، ٣) ، (−٢ ، −٥) يحقق العلاقة ٢س − ص = ١

الحل

بوضع س = ٠ ، ص = ١

٢ × ٠ − ١ = ٠ − ١ = −١ ≠ ١

∴ (٠ ، ١) لا تحقق

بوضع س = ٥ ، ص = ٣

٢ × ٥ − ٣ = ١٠ − ٣ = ٧ ≠ ١

∴ (٥ ، ٣) لا تحقق

بوضع س = −٢ ، ص = −٥

(٢ × −٢) − (−٥) = −٤ + ٥ = ١

∴ (−٢ ، −٥) يحقق المعادلة

مثال ٣ إذا كان (-٢، ١) يحقق العلاقة ٣س + ب ص = ١ فأوجد قيمة ب

الحل

بوضع س = -٢ ، ص = ١

(٣ × -٢) + (ب × ١) = ١

-٦ + ب = ١

ب = ١ + ٦ = ٧

∴ ب = ٧

مثال ٤ إذا كان (-٣، ٢) يحقق العلاقة ٣س + ب ص = ١ فأوجد قيمة ب

الحل

بوضع س = -٣ ، ص = ٢

(٣ × -٣) + (ب × ٢) = ١

-٩ + ٢ب = ١

٢ب = ١ + ٩

٢ب = ١٠ ÷ ٢

∴ ب = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥ ∴ ب = ٥

مثال ٥ إذا كان (ل ، ٢ل) يحقق العلاقة س + ص = ٣٠ فأوجد قيمة ل

الحل

بوضع س = ل ، ص = ٢ل

∴ ل + ٢ل = ٣٠

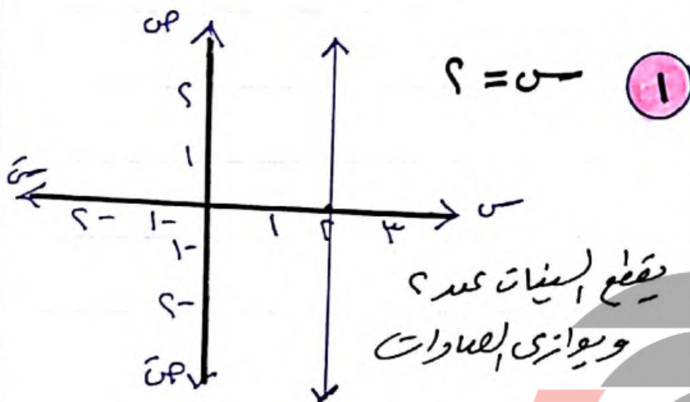
٣ل = ٣٠ ÷ ٣

∴ ل = $\frac{٣٠}{٣}$ = ١٠ ∴ ل = ١٠

الفكرة الثانية تمثيل العلاقة الخطية

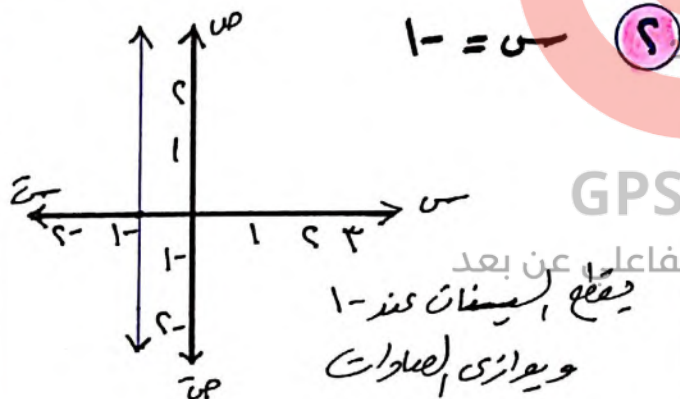
مثال ٦ مثل كلاً من العلاقات التالية

١ س = ٢



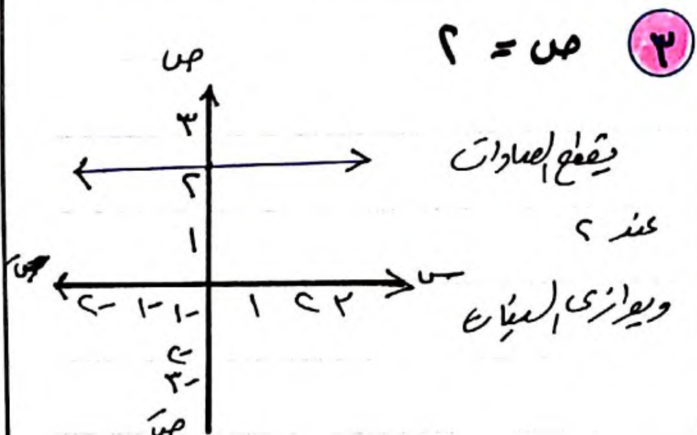
يقطع السينات عند ٢ ويوازى الصادات

٢ س = -١



يقطع السينات عند -١ ويوازى الصادات

٣ ص = ٢



يقطع الصادات عند ٢ ويوازى السينات

ملحوظة هامة

① س = ٠ يمثل محور الصادات

② ص = ٠ يمثل محور السينات

③ لإيجاد نقطة التقاطع مع محور السينات نضع ص = ٠

④ لإيجاد نقطة التقاطع مع محور الصادات نضع س = ٠

مثال ٧ مثل العلاقات التالية

① س + ص = ٢

الحل

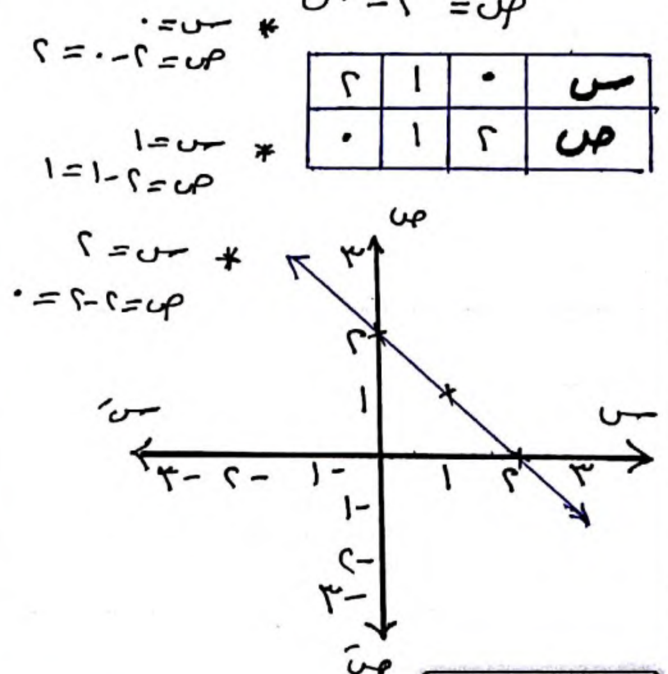
ص = ٢ − س

* س = ٠
ص = ٢ − ٠ = ٢

* س = ١
ص = ٢ − ١ = ١

* س = ٢
ص = ٢ − ٢ = ٠

س	٠	١	٢
ص	٢	١	٠



② ص = ٢ س − ١

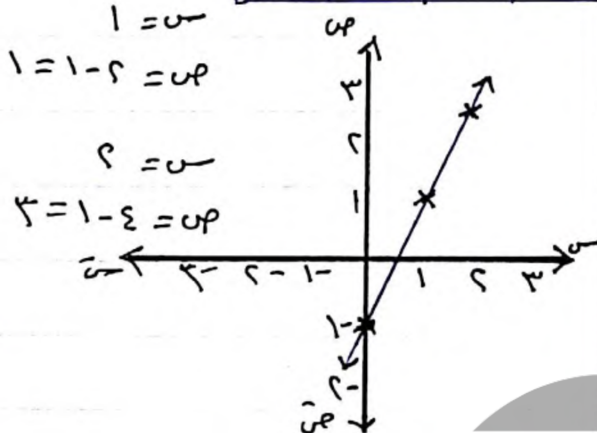
الحل

س = ٠
ص = ٠ − ١ = −١

س = ١
ص = ٢ − ١ = ١

س = ٢
ص = ٤ − ١ = ٣

س	٠	١	٢
ص	−١	١	٣



مثال ٨

٢ س + ٣ ص = ٦
ثم أوجد مساحة المثلث المحدود بالمعادلة ومحورى الإحداثيات

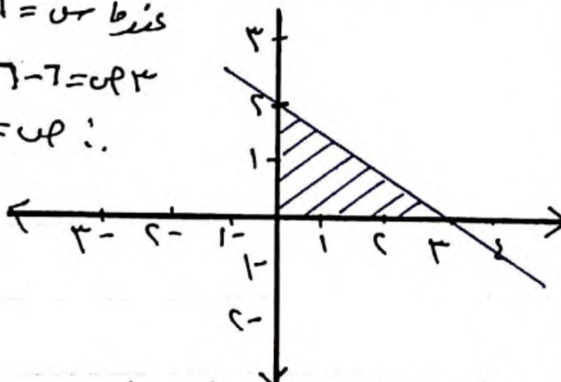
الحل

٣ ص = ٦ − ٢ س

عندما س = ٠
٣ ص = ٦ ∴ ص = ٢

عندما س = ٣
٣ ص = ٦ − ٦ = ٠
∴ ص = ٠

س	٠	٣
ص	٢	٠



يقطع محور السينات فى (٣ ، ٠)
" " الصادات فى (٠ ، ٢)

مساحة △ = ½ × ٣ × ٢ = ٣ وحدة مربعة

الواجب

١ أكمل

(١) س = ٠ يمثل ...

(٢) ص = ٠ يمثل ...

(٣) أكمل الأزواج المرتبة التي تحقق العلاقة

ص = ٣س - ١

(١ ، ...) (٠ ، ...) (٢ ، ...)

٢ أوجد ثلاثة أزواج مرتبة تحقق

(١) ص = س + ١

(٢) ص = ٢س - ١

(٣) ص = ٣س - ٥

(٤) ص - ٢س = ١

(٥) ص - ٣ = س

٣ إذا كان (٢ ، ٣) تحقق العلاقة

٣س + ب ص = ٩

فأوجد قيمة ب

٤ إذا كان (ك ، ك) تحقق العلاقة

س + ٢ص = ١٥

فأوجد قيمة ك

٥ إذا كان (ك ، -ك) تحقق العلاقة

٢س + ص = ٥

٦ مثل كلاً من العلاقات التالية

(١) ص = س - ١

(٢) ص = ٢س + ٣

(٣) ص - س = ٢

(٤) ٢س + ص = ٦

(٥) ص = ٢

(٦) س = ١

(٧) س = -٣

(٨) ص = -٥

(٩) س = ٠

(١٠) ص = ٠

اضحك

واحدة وحشة بتقول لجوزها

يا راجل صلح شباك المطبخ

احسن جارنا يشوفني

قالها : شاغل وقال هيصلح

على حسابه

ميل الخط المستقيم

الوحدة الثانية ٢

ملاحظات

١ ميل الخط المستقيم = فرق الصادات / فرق السينات = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

٢ ميل الموازى لمحور السينات (أفقى) = صفر

٣ ميل الموازى لمحور الصادات (رأسى) = غير معرف

٤ ميل العمودى على محور الصادات يعنى موازى لمحور السينات = صفر

٥ ميل العمودى على محور السينات يعنى موازى لمحور الصادات = غير معرف

٦ إذا كان موازى لمحور السينات يبقى البسط = صفر

٧ إذا كان موازى لمحور الصادات يبقى المقام = صفر

الفكرة الأولى

مثال ١: أوجد ميل المستقيم المار بكل زوج من النقط التالية

١ (١ ، ٢) ، (٣ ، ٣)

الحل

الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٢}{٣ - ١} = \frac{١}{٢}$

٢ (٣ ، ٢) ، (٤ ، ٥)

الحل

الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٥ - ٢}{٤ - ٣} = \frac{٣}{١} = ٣$

٣ (١ ، ٣) ، (٢ ، ١)

الحل

الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{١ - ٣}{٢ - ١} = \frac{-٢}{١} = -٢$

٤ (٢ ، ٣) ، (٥ ، ٣)

الحل

الميل = $\frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٣}{٥ - ٢} = \frac{صفر}{٣} =$ صفر

يعنى موازى لمحور السينات

(٢، ٥) (٢، ٧)

الميل = (ص٢ − ص١) ÷ (س٢ − س١) = (٧ − ٥) ÷ (٢ − ٢) = ٢ ÷ صفر = غير معرف

يعني موازي لمحور الصادات

الفكرة الثانية

مثال ٢ إذا كان ميل المستقيم (٢، ٥)، (٣، ص) = ٤ فأوجد قيمة ص

الحل

∵ ميل المستقيم = (ص٢ − ص١) ÷ (س٢ − س١) = (ص − ٥) ÷ (٣ − ٢)

(ص − ٥) ÷ ١ = ص − ٥ = ٤

∴ ص = ٤ + ٥ ∴ ص = ٩

مثال ٣ إذا كان (−٣، ٤)، (١، ص) ميله = ٢ فأوجد قيمة ص

الحل

الميل = (ص٢ − ص١) ÷ (س٢ − س١) = (ص − ٤) ÷ (١ − (−٣))

(ص − ٤) ÷ (١ + ٣) = (ص − ٤) ÷ ٤ = ٢

∴ ص − ٤ = (٢ × ٤)

ص − ٤ = ٨

∴ ص = ٨ + ٤

ص = ١٢

مثال ٤ اثبت أن النقط أ(٢، ٣)، ب(٤، ٢)، جـ(٨، ٠) تقع على استقامة واحدة

الحل

ميل أب (٢، ٣) (٤، ٢)

= (٢ − ٣) ÷ (٤ − ٢) = −١ ÷ ٢

ميل ب جـ (٤، ٢) (٨، ٠)

= (٠ − ٢) ÷ (٨ − ٤) = −٢ ÷ ٤ = −١ ÷ ٢

∵ ميل أب = ميل ب جـ وهما مشتركتان في نقطة ب

∴ أ، ب، جـ تقع على استقامة واحدة.

مثال ٥ إذا كانت أ(٣، ٢)، ب(٥، −١)، جـ(١، ك) على استقامة واحدة فأوجد قيمة ك

الحل

ميل أب (٣، ٢) (٥، −١)

= (−١ − ٢) ÷ (٥ − ٣) = −٣ ÷ ٢

ميل ب جـ (٥، −١) (١، ك)

= (ك − (−١)) ÷ (١ − ٥) = (ك + ١) ÷ (−٤)

∵ م ، ب ، جـ على استقامة واحدة

∴ ميل $\overleftrightarrow{مب}$ = ميل $\overleftrightarrow{بجـ}$

∴ $\frac{-٣}{٢} = \frac{ك+١}{-٤}$

٢(ك+١) = -٣ × -٤

٢ك + ٢ = ١٢

٢ك = ١٢ - ٢   ٢ك = ١٠

∴ ك = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥   ∴ ك = ٥

الواجب

١ أكمل

١ ميل المستقيم الموازى لمحور السينات = ...

٢ ميل المستقيم الموازى لمحور الصادات ....

٣ ميل المستقيم الأفقى = ...

٤ ميل المستقيم الرأسى = ...

٥ ميل العمودى على محور السينات = ...

٦ ميل العمودى على محور الصادات = ...

٢ أوجد ميل $\overleftrightarrow{مب}$ حيث

١ م (١ ، ٢)   ب (٣ ، ٦)

٢ م (٢ ، ٥)   ب (١ ، ٤)

٣ م (-٢ ، ١)   ب (٣ ، -١)

٤ م (٥ ، ٢)   ب (٣ ، ٢)

٥ م (٢ ، ١)   ب (٢ ، ٤)

٣ إذا كان ميل $\overleftrightarrow{مب}$ = ٣

حيث م (١ ، ٣) ، ب (٢ ، ص) فأوجد قيمة ص

٤ أوجد قيمة ك التى تجعل (٣ ، ٤) (٢ ، ك) موازياً لمحور السينات .

٥ أوجد قيمة ك التى تجعل (ك ، ١) (٥ ، ٧) موازياً لمحور الصادات

على فكرة ياشباب

الموازى لمحور السينات يكون الاحداثيات الصادية متساوية ص١ = ص٢

والموازى لمحور الصادات يكون الاحداثيات السينية متساوية س١ = س٢

٦ اثبت أن م ، ب ، جـ على استقامة واحدة

م (٣ ، ٣) ب (١ ، ١) جـ (٢ ، ٢)

الوحدة الثالثة

١

جمع البيانات وتنظيمها

مثال فيما يلي بيان بالدرجات التي حصل عليها ٣٠ طالباً في احد الاختبارات وكانت الدرجة النهائية من ٢٠ درجة

١٢	١٥	٨	١٣	١٦	١٧	٨	٩	٨	١٤
٢	٧	١٠	١٢	١٥	١٩	١١	١٣	٥	٧
٥	١٦	١٩	٤	٩	١٢	٣	١٣	١٧	٦

المطلوب تكوين الجدول التكراري ذي المجموعات لهذه البيانات

الحل

المدى = أكبر قيمة - أصغر قيمة

= ١٩ - ٢ = ١٧

عدد المجموعات = ٦

طول المجموعة = $\frac{١٧}{٦}$ ≃ ٣

المجموعة	العلامات الإحصائية	التكرار
٢-	///	٣
٥-	~~////~~	٥
٨-	~~////~~ /	٦
١١-	~~////~~ //	٧
١٤-	~~////~~	٥
١٧-	////	٤

بحذف عمود العلامات

المجموعة	٢-	٥-	٨-	١١-	١٤-	١٧-	المجموع
التكرار	٣	٥	٦	٧	٥	٤	٣٠

افهم الدرس ده كويس علشانه ملوش أى لازوم

* من طلب العلا سهر الليالي ونشر اللحاف وقال أنا مالي

* من نام واستراح ضمن النجاح

ومن سهر الليالي عاد لبنه تاني

* أوعوا تصدقوا الكلام ده

٢ الجدول التكرارى الصاعد والنازل

الوحدة الثالثة

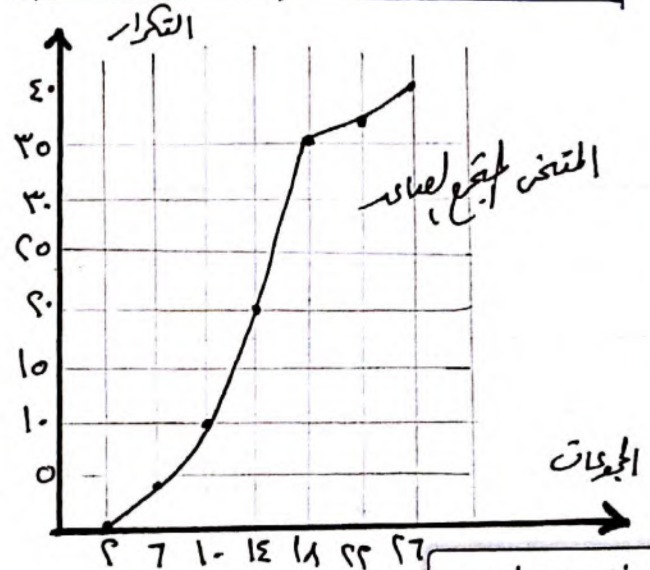
مثال ١ كون الجدول التكرارى المتجمع الصاعد وارسم المنحنى المتجمع الصاعد

المجموعات	٢-	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	المجموع
التكرار	٤	٦	١٠	١٥	٣	٢	٤٠

الحل

الجدول التكرارى المتجمع الصاعد

الحدود العليا للمجموعات	التكرار الصاعد
أقل من ٢	٠
أقل من ٦	٠+٤ = ٤
أقل من ١٠	٤+٦ = ١٠
أقل من ١٤	١٠ + ١٠ = ٢٠
أقل من ١٨	٢٠+١٥ = ٣٥
أقل من ٢٢	٣٥+٣ = ٣٨
أقل من ٢٦	٣٨+٢ = ٤٠



مثال ٢ من بيانات الجدول السابق كون الجدول التكرارى المتجمع النازل وارسم المنحنى المتجمع النازل

الحل

الجدول التكرارى المتجمع النازل



الحدود العليا للمجموعات	التكرار النازل
٢ فأكثر	٣٦+٤ = ٤٠
٦ فأكثر	٣٠+٦ = ٣٦
١٠ فأكثر	٢٠+١٠ = ٣٠
١٤ فأكثر	٥+١٥ = ٢٠
١٨ فأكثر	٢+٣ = ٥
٢٢ فأكثر	صفر+٢ = ٢
٢٦ فأكثر	صفر



واجب

الحدود	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	٦٠-	٧٠-	٨٠-	٩٠-	المجموع
التكرار	٣	٧	١٦	٢٦	١٥	١٣	١١	٩	١٠٠

كون المتجمع الصاعد والنازل

الوسط الحسابى

الوحدة الثالثة ٣

الوسط الحسابى = مجموع القيم / عددهم

الفكرة الأولى: مباشرة

مثال ١ أوجد الوسط الحسابى لكل من

١) ١ ، ٣ ، ٩ ، ٨ ، ٤

الحل

$\frac{١ + ٣ + ٩ + ٨ + ٤}{٥} = \frac{٢٥}{٥} = ٥$

٢) م−٢ ، ٤ ، ١ ، ٥ ، م+٣

الحل

$\frac{م - ٢ + ٤ + ١ + ٥ + م + ٣}{٥}$ (تُشطب م مع −م)

$= \frac{١٥}{٥} = ٣$

مثال ٢ إذا كان الوسط الحسابى لدرجات خمس طلاب هو ٢٠ فإن مجموع الدرجات = ...

الحل

الوسط الحسابى = مجموع الدرجات / عددهم

$\frac{مجموع الدرجات}{٥} = ٢٠$

∴ مجموع الدرجات = ٥ × ٢٠ = ١٠٠

مثال ٣ إذا كان الوسط الحسابى لدرجات عشرة تلاميذ هو ٧ فإن مجموع الدرجات = ...

الحل

الوسط الحسابى = مجموع الدرجات / عددهم

$\frac{مجموع الدرجات}{١٠} = ٧$

∴ مجموع الدرجات = ٧ × ١٠ = ٧٠

مثال ٤ مركز المجموعة = (الحد الأدنى + الحد الأعلى) / ٢

١) المجموعة من ٨ إلى ١٤ مركزها = ...

$\frac{٨ + ١٤}{٢} = \frac{٢٢}{٢} = ١١$

٢) إذا كان الحد الأدنى ٤ والمركز ٩ فإن الحد الأعلى = ...

المركز = (الحد الأدنى + الحد الأعلى) / ٢

$\frac{٤ + الحد الأعلى}{٢} = ٩$

٤ + الحد الأعلى = ١٨

∴ الحد الأعلى = ١٨ − ٤ = ١٤

الفكرة الثانية: الوسط الحسابي للمجموعات

مثال: أوجد الوسط الحسابي لدرجات ٥٠ تلميذ

المجموعات	١٠-	٢٠-	٣٠-	٤٠-	٥٠-	المجموع
التكرار	٨	١٢	١٤	٩	٧	٥٠

الحل

مركز المجموعة الأولى $= \frac{١٠+٢٠}{٢} = ١٥$

الثانية $= \frac{٢٠+٣٠}{٢} = ٢٥$

وهكذا

المجموعة	مركز المجموعة (م)	التكرار ك	(م × ك)
١٠-	$\frac{١٠+٢٠}{٢} = ١٥$	٨	١٥ × ٨ = ١٢٠
٢٠-	٢٥	١٢	٢٥ × ١٢ = ٣٠٠
٣٠-	٣٥	١٤	٣٥ × ١٤ = ٤٩٠
٤٠-	٤٥	٩	٤٥ × ٩ = ٤٠٥
٥٠-	٥٥	٧	٥٥ × ٧ = ٣٨٥
المجموع		٥٠	١٧٠٠

الوسط الحسابي $= \frac{\text{مجموع (م × ك)}}{\text{مجموع ك}} = \frac{١٧٠٠}{٥٠}$

$= ٣٤$ درجة

مثال ٦ حتة أكل صغيرة

إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع تكراري هو ٢٩,٤ ومجموع التكرارات ١٠٠ فإن مجموع (م × ك) = ...

∵ الوسط الحسابي $= \frac{\text{مجموع (م × ك)}}{\text{مجموع ك}}$

$\frac{\text{مجموع (م × ك)}}{١٠٠} = ٢٩,٤$

∴ مجموع (م × ك) $= ٢٩,٤ \times ١٠٠$

$= ٢٩٤٠$

الواجب

(١) أوجد الوسط الحسابي

المجموعات	٥-	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	المجموع
التكرار	٧	١٠	١٢	١٣	١٨	٥٠

(٢) فيما يلي توزيع تكراري لـ ٣٠ طفلاً

وزن الطفل	٦-	١٠-	١٤-	١٨-	٢٢-	٢٦-	٣٠-	المجموع
التكرار	٢	٣	....	٨	٦	٤	٢	٣٠

أكمل الجدول ثم أوجد الوسط الحسابي

الوحدة الثالثة ٤

الوسيط

كيفية إيجاد الوسيط

١ ترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً

٢ إذا كان عدد القيم فردي
نأخذ اللي في المنتصف

٣ إذا كان عدد القيم زوجي
$\frac{\text{العددين اللي في المنتصف}}{٢}$

مثال ١ أوجد الوسيط لكل مجموعة

١ ١، ٣، ٢، ٥، ٧

الحل
نرتبهم ١، ٢، (٣)، ٥، ٧
الوسيط = ٣

٢ ٧، ٢٠، ٥، ١٢، ٣

الحل
نرتبهم ٣، ٥، (٧)، ١٢، ٢٠
الوسيط = ٧

٣ ١، ٨، ٦، ٤، ٩، ٣، ٦

الحل
نرتبهم ١، ٣، ٤، [٤، ٦]، ٨، ٩

$\frac{٤+٦}{٢} = \frac{١٠}{٢} = ٥$

٤ أوجد ترتيب الوسيط
١، ٣، ٥، ٤، ٧، ٩، ١١

الحل
بعد الترتيب
١، ٣، ٤، [٥]، ٧، ١١، ١٩

ترتيب الوسيط هو الرابع

٥ أوجد ترتيب الوسيط
٨، ١، ٣، ١٢، ٩

الحل
بعد الترتيب ١، ٣، [٨]، ٩، ١٢

ترتيب الوسيط هو الثالث

٦ إذا كان ترتيب الوسيط الرابع
فإن عدد القيم = ٣ + ١ + ٣ = ٧

٧ إذا كان ترتيب الوسيط السادس
فإن عدد القيم = ٥ + ١ + ٥ = ١١

⑧ إذا كان عدد القيم ٩ فإن ترتيب

الوسيط = $\frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$ الخامس

٤ ① ٤ = ٩

⑨ إذا كان عدد القيم ٧ فإن ترتيب

الوسيط = $\frac{7+1}{2} = 4$ الرابع

٣ ① ٣

ملحوظة هامة

نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والنازل تقسيم على المحور الأفقى (المجموعات) قيمة الوسيط وتقسيم على المحور الرأسى (التكرار) ترتيب الوسيط

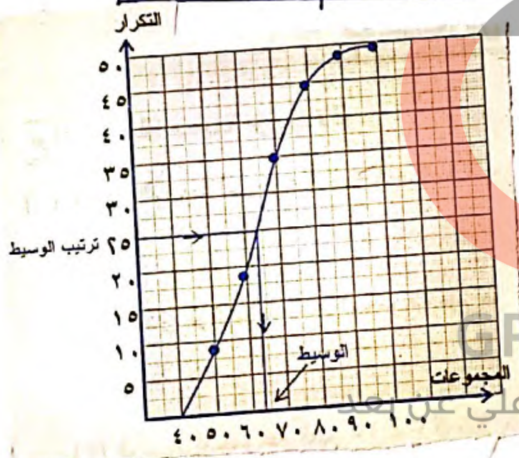
يعنى الرأسى ترتيب الوسيط
والأفقى قيمة الوسيط

مثال ٢ من الجدول التالى احسب الوسيط بيانياً.

المجموعات	-٤٠	-٥٠	-٦٠	-٧٠	-٨٠	-٩٠	المجموع
التكرار	٨	١١	١٦	١٠	٤	١	٥٠

الحل

الحدود العليا للمجموعات	التكرار المتجمع الصاعد
أقل من ٤٠	صفر
أقل من ٥٠	٠+٨ = ٨
أقل من ٦٠	٨+١١ = ١٩
٧٠ //	١٩+١٦ = ٣٥
٨٠ //	٣٥+١٠ = ٤٥
٩٠ //	٤٥+٤ = ٤٩
١٠٠ //	٤٩+١ = ٥٠



ترتيب الوسيط = $\frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{50}{2} = 25$

من الرسم قيمة الوسيط هى ٦٤

الواجب

① الوسيط (٣، ١، ٢، ١١، ٥) هو ----
② ترتيب الوسيط (١، ٢٢، ٣، ١٥، ٧) هو ----
③ إذا كان ترتيب الوسيط ٥ فإن عدد القيم ----
④ إذا كان عدد القيم ٥ فإن ترتيب الوسيط ----
⑤ نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والنازل على الرأسى ---- وعلى الأفقى ----

المنوال

الوحدة الثالثة ٥

المنوال لمجموعة من القيم هو القيمة الأكثر شيوعاً (تكراراً) بين القيم.

مثال ١ أكمل

١) المنوال لمجموعة القيم ١، ٣، ٤، ٥، ٤ هو ٤

٢) ٢، ٣، ٥، ٣، ٥، ٣ هو ٣

٣) إذا كان المنوال (٥، ٧، ٣، ك، ٤) هو ٧ فإن ك = ٧

٤) إذا كان المنوال لـ (١، ٢، ك، ٥، ٣) هو ٣ فإن ك = ٣

٥) إذا كان المنوال (٣، ٢، ١، ك-١، ٤) هو ٤ فإن ك = ...

ك - ١ = ٤ ∴ ك = ٤ + ١ = ٥

٦) إذا كان المنوال (٢، ١، ٤، ٣ك، ٦) هو ٦ فإن ك = ...

٣ك = ٦ ، ك = $\frac{٦}{٣}$ = ٢

مثال ٢ الجدول التالي يبين توزيع الأجر الأسبوعي لعمال مصنع احسب الأجر المنوالي

الأجر	١٥-	٢٥-	٣٥-	٤٥-	٥٥-	٦٥-	٧٥-
عدد العمال	١٠	١٢	٢٦	٣٠	١٧	١٠	٥

الحل

نرسم المدرج التكراري

∴ الأجر المنوالي هو ٤٧ جنيهاً

انتهى منهج الفصل الدراسي الأول

خالص تمنياتي لكم جميعاً بالتوفيق

محمد أدهم

ثانيا

الهندسة

الصف الثانى الإعدادى

الترم الاول



إعداد أ/ محمد أدهم
ت / ٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧



مراجعة على اللي فات

① مجموع قياسي الزاويتين المتتامتين = °٩٠

② مجموع قياسي الزاويتين المتكاملتين = °١٨٠

③ مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة واحدة = °٣٦٠

④ مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = °١٨٠

⑤ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = °٣٦٠

⑥ مجموع قياسات زوايا أي مضلع محدب = (ن-٢) × °١٨٠

⑦ قياس كل زاوية داخلة لمضلع محدب منتظم = $\frac{(ن-٢) \times ١٨٠}{ن}$

⑧ قياس الزاوية الخارجة للمثلث = مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين ما عدا المجاورة لها.

⑨ قياس الزاوية الخارجة للمثلث المتساوي الأضلاع = °١٢٠

⑩ إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتان في القياس

⑪ إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن

* كل زاويتين متبادلتين متساويتين في القياس
* كل زاويتين متناظرتين متساويتين في القياس
* كل زاويتين داخلتين وفي جهة واحدة من القاطع متكاملتان

⑫ حالات التطابق

* ضلعين وزاوية محصورة
* زاويتين وضلع واصل بينهم
* الأضلاع الثلاثة
* وتر وضلع في المثلث القائم

⑬ نظرية فيثاغورث

في المثلث القائم مربع الوتر = مجموع مربعي الضلعين الآخرين.

١٤ الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى مثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين

ينصف الضلع الثالث

١٥ القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث.

توازى الضلع الثالث وطولها = نصف طوله

١٦ خواص متوازى الأضلاع

هو شكل رباعى فيه

* كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين فى الطول
* كل زاويتين متقابلتين متساويتين فى القياس
* كل زاويتين متتاليتين مجموعهما ١٨٠°
* القطران ينصف كل منهما الآخر

١٧ المستطيل

هو متوازى أضلاع فيه

* إحدى زواياه قائمة
* القطران متساويان

١٨ المعين

هو متوازى أضلاع فيه

* الأضلاع متساوية فى الطول
* القطران متعامدان

١٩ المربع

* الأضلاع متساوية
* الزوايا قائمة
* القطران متعامدان ومتساويان فى الطول

اضحك

قال لها ضعى لى المزيد من السكر فى الشاى
اقتربت ووضعت اصبعها فى الكأس
ثم وضعته بفمه وابتسمت قائلة
هكذا أفضل
نظر لها فى عينيها ....
ولزقها كف جاب لحمة سنانها
وقالها غورى هاتى السكر من المطبخ
هو أنا ناقص قرف.

---

* واحد بيعاكس واحدة *

رآها فى السوق كانت تشترى عسل
فتذوقته فقال لها كيف للعسل
أن يتذوق العسل
فقالت له زى ما الجزمة هتاخد بالجزمة

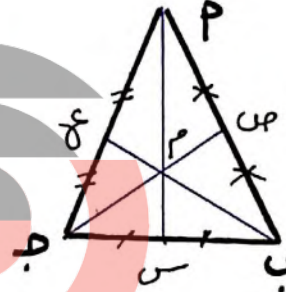
الوحدة الرابعة ١

متوسطات المثلث

* يعنى أية متوسط ؟؟

متوسط المثلث هو القطعة المستقيمة المرسومة من أى رأس إلى منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.

* فى الشكل المقابل



أس ، ب ع ، جـ ص متوسطات

مش ملاحظ انهم متقاطعين فى نقطة واحدة

نظرية (١)

متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً فى نقطة واحدة.

* عايزك تبص فى المثلث اللى فوق وجاوب

نقطة التقاطع أقرب للرأس ولا للقاعدة؟

طبعاً واضح انها أقرب للقاعدة.

نظرية (٢)

نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ١ : ٢ من جهة القاعدة

* وعلى فكرة يا شطار عكسه بدل ١ : ٢
ممكن تكتب

٢ : ٤

٣ : ٦

٤ : ٨

٥ : ١٠

كده فهمتوا يا شباب ؟ انهم بتبقى النصف وخلاص

* طيب والنقطة دى بتقسم كل منهم بنسبة ٢ : ١ من جهة الرأس.

الخلاصة

١ : ٢ من جهة القاعدة

٢ : ١ من جهة الرأس



أكمل

النقطة التي تقسم متوسط المثلث بنسبة ٢:١ من جهة القاعدة تسمى ... نقطة تقاطع متوسطاته

خلّص بالكلام النسبادى



أء متوسط

م نقطة تلاقي المتوسطات

مء = $\frac{1}{2}$ أم — ومنها — أم = ٢مء

مء = $\frac{1}{3}$ أء — ومنها — أء = ٣مء

أم = $\frac{2}{3}$ أء — ومنها — أء = $\frac{3}{2}$ أم

ملحوظة هتساعدك في حل المسائل

اقسم طول المتوسط ÷ ٣

واللي ناحية القاعدة ×١

اللي ناحية الرأس ×٢

١ يعني المتوسط اللي طوله ١٢ سم

$\frac{12}{3}$ = ٤

جهة القاعدة = ٤ سم

وجهة الرأس = ٢×٤ = ٨ سم

٢ والمتوسط اللي طوله ١٥ سم

$\frac{15}{3}$ = ٥

جهة القاعدة = ٥ سم

جهة الرأس = ٢×٥ = ١٠ سم

٣ إذا كان جهة القاعدة ٣ سم

جهة الرأس = ٢×٣ = ٦ سم

ويكون المتوسط كله = ٣ + ٦ = ٩ سم

٤ إذا كان جهة الرأس ٢٠ سم

جهة القاعدة = $\frac{1}{2}$ × ٢٠ = ١٠ سم

ويكون طول المتوسط كله = ٣٠ سم

القاعدة		الرأس		المتوسط كله
مء	:	أم	:	أء
١	:	٢	:	٣

مثال ١

في الشكل المقابل

△ أ ب جـ فيه د منتصف ب جـ

، م د = $\frac{1}{2}$ أ م ، أ م = ٩ سم

، ب هـ = ١٢ سم ، جـ هـ = ٨ سم

أوجد طول أ هـ ، م هـ ، أ د

الحل

∵ د منتصف ب جـ

∴ أ د متوسط

، ∵ م د = $\frac{1}{2}$ أ م

∴ م نقطة تلاقي المتوسطات

∴ ب هـ متوسط

، ∵ جـ هـ = ٨ سم ∴ أ هـ = ٨ سم

، ∵ ب هـ = ١٢ سم

$\frac{١٢}{٣}$ = ٤

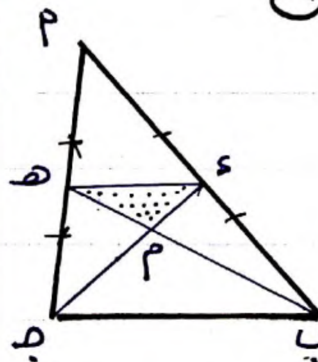
∴ م هـ = ٤ سم ، ب م = ٨ سم

∵ أ م = ٩ سم ∴ م د = $\frac{٩}{٢}$ = ٤,٥ سم

∴ أ د = ٩ + ٤,٥ = ١٣,٥ سم

مثال ٢

في الشكل المقابل



ب جـ = ٨ سم

ب م = ٦ سم

جـ م = ٤ سم

أوجد محيط △ د م هـ

الحل

∵ د منتصف أ ب ، هـ منتصف أ جـ

∴ د هـ (قطعة مرسومة بين منتصفي ضلعين في مثلث)

∴ د هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ = $\frac{1}{2}$ × ٨ = ٤

∴ د هـ = ٤ سم

∵ ب هـ ، جـ د متوسطان متقاطعان في م

∴ م نقطة تلاقي متوسطات المثلث

∵ ب م = ٦ سم

∴ م هـ = $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٣ سم

، ∵ جـ م = ٤ سم

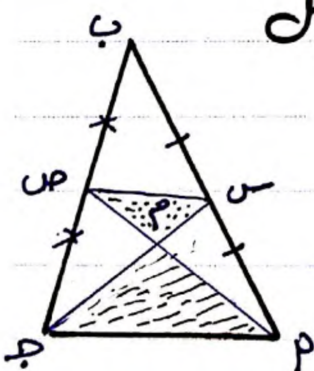
م د = $\frac{٤}{٢}$ = ٢ سم

∴ محيط المثلث د م هـ

= ٤ + ٣ + ٢ = ٩ سم

مثال ٣

في الشكل المقابل



س ص = ٥ سم

جـ م = ٨ سم

م ص = ٣ سم

أوجد

١) محيط Δ م س ص

٢) محيط Δ م أ هـ

الحل

∵ س منتصف أب ، ص منتصف بـ جـ

∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أ هـ

∵ س ص = ٥

∴ أ هـ = ١٠ سم

∵ جـ م = ٨ سم

∴ س م = $\frac{8}{2}$ = ٤ سم

، ∵ ص م = ٣ سم

∴ أ م = ٣ × ٢ = ٦ سم

١) محيط Δ م س ص

= م س + م ص + س ص

= ٤ + ٣ + ٥ = ١٢ سم

٢) محيط Δ م أ هـ

= م أ + م هـ + أ هـ

= ٦ + ٨ + ١٠ = ٢٤ سم

الواجب

١) أكمل

١) متوسطات المثلث تتقاطع جميعاً فى .....

٢) نقطة تقاطع متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ...:... من جهة القاعدة ونسبة ...:... من جهة الرأس

٣) نقطة تلاقى متوسطات المثلث تقسم كلاً منها بنسبة ٥:... من جهة القاعدة ونسبة ٨:... من جهة الرأس

٤) عدد متوسطات أى مثلث = ...

٥) إذا كان أ د متوسط فى Δ و كانت م نقطة تقاطع المتوسطات وكانت أ د = ٦ سم فإن أ م = ... سم ، م د = ... سم

٢) فى الشكل المقابل

هـ ب = ٦ سم

ب م = ٤ سم

د جـ = ٩ سم

أوجد محيط Δ د م هـ

أ ، هـ ، د ، م ، ب ، جـ ، ٦

٣) فى الشكل المقابل

ب ص = ٨ سم

م جـ = ١٢ سم

ب م = ٦ سم

أوجد محيط Δ س م ص

أ ، س ، ص ، م ، ب ، جـ

الوحدة الرابعة

٢

تابع متوسطات المثلث

نظرية (٣)

طول متوسط المثلث القائم الخارج من رأس القائمة = نصف طول الوتر.

مثلاً

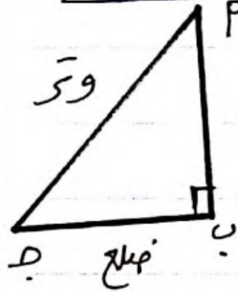


إذا كان أ جـ = ١٠سم

∴ المتوسط ب ء

ب ء = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥سم

أية رأيكم نراجع فيثاغورث



(أ جـ)^٢ = (أ ب)^٢ + (ب جـ)^٢ ضلع

(أ ب)^٢ = (أ جـ)^٢ − (ب جـ)^٢

(ب جـ)^٢ = (أ جـ)^٢ − (أ ب)^٢

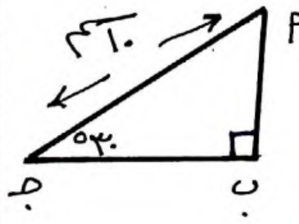
عايز الوتر ربع واجمع وخد الجذر

عندك الوتر ربع واطرح وخد الجذر

نتيجة هامة

طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° فى المثلث القائم = نصف طول الوتر

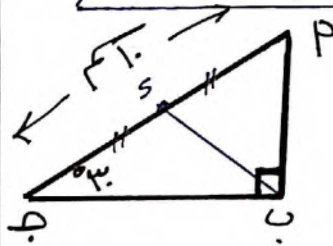
مثلاً



أ ب هو الضلع المقابل للزاوية ٣٠°

∴ أ ب = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥سم

مثال ١ فى الشكل المقابل أكمل



ب ء = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥سم

أ ب = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥سم

أ ء = $\frac{١٠}{٢}$ = ٥سم

محيط △ أ ب ء = أ ب + ب ء + أ ء

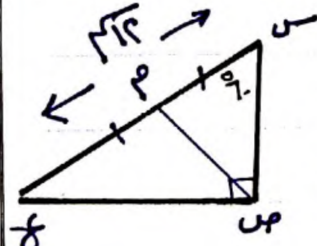
= ٥ + ٥ + ٥ = ١٥سم

ب جـ = $\sqrt{(١٠)^٢ - (٥)^٢}$ = ٥$\sqrt{٣}$سم

على فكرة

هذا المثلث يسمى مثلث ستينى لأن قياس زواياه ٩٠° ، ٣٠° ، ٦٠°

مثال ٢ فى الشكل المقابل



أوجد محيط △ س ص م

الحل

∵ ص م متوسط خارج من رأس القائمة

= نصف طول الوتر

∴ ص م = $\frac{١٢}{٢}$ = ٦ سم

∵ س ع = ١٢ سم

∴ س م = $\frac{١٢}{٢}$ = ٦ سم

في Δ س ص ع

ق($\hat{ع}$) = ١٨٠ − [٩٠ + ٦٠] = ٣٠°

∴ س ص = $\frac{١٢}{٢}$ = ٦ سم [ضلع مقابل ٣٠°]

∴ محيط Δ س ص م = ٦ + ٦ + ٦ = ١٨ سم

خلي فكرة: س ص م مثلث متساوي الأضلاع

تمرين ٣ في الشكل المقابل

اثبت أن $\overline{أ جـ} = \overline{ب هـ}$

الحل

في Δ أ ب جـ

ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ جـ متوسط خارج من رأس القائمة ← ①

في Δ ب ء هـ

ب ء = $\frac{١}{٢}$ ب هـ (ضلع مقابل ٣٠°) ← ②

من ①، ②

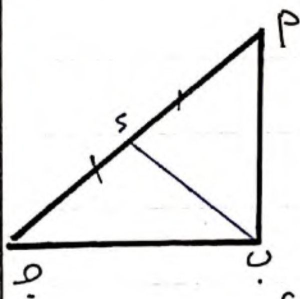
∴ ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ جـ = $\frac{١}{٢}$ ب هـ

∴ أ جـ = ب هـ #

عكس نظرية (٣)

إذا كان طول متوسط المثلث المرسوم من أحد رؤوسه يساوي نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس كانت زاوية هذا الرأس قائمة

مثلاً



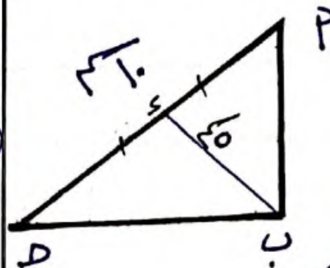
إذا كان ب ء = $\frac{١}{٢}$ أ جـ

تكون زاوية ب قائمة

مثال ٤

فى الشكل المقابل

أوجد ق ($\hat{ب}$)



الحل

∵ ء منتصف أج

∴ ب ء متوسط

∴ ب ء = ٥ = $\frac{1}{2}$ أج

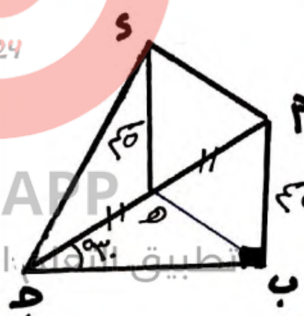
∴ ق ($\hat{ب}$) = ٩٠° عكس النظرية

مثال ٥

فى الشكل المقابل

اثبت أن

ق ($\hat{أ ء ج}$) = ٩٠°



الحل

فى △ أ ب ج

∵ أب = ٥سم ∴ أج = ١٠سم

(لأن الضلع المقابل ٣٠° = نصف الوتر)

∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ = ٥سم

(متوسط خارج من رأس القائمة)

فى △ أ ء ج أج = ١٠سم

∵ ء هـ متوسط = ٥سم

= $\frac{1}{2}$ أج

∴ ق ($\hat{أ ء ج}$) = ٩٠° #

الواجب

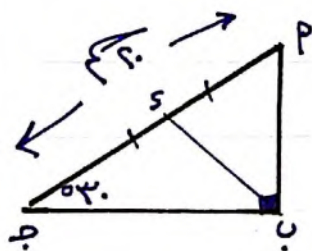
١ أكمل

١) طول متوسط المثلث القائم الخارج من رأس القائمة = ---- الوتر

٢) طول الضلع المقابل للزاوية ٣٠° فى المثلث القائم = ---- الوتر

٣) إذا كان طول متوسط المثلث = نصف طول الضلع المقابل لهذا الرأس تكون زاوية الرأس .....

٢ فى الشكل المقابل



ب ء = ---

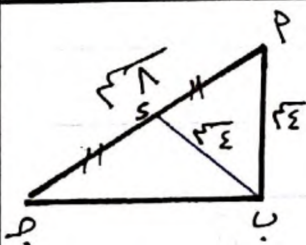
أ ء = ---

أب = ---

محيط △ أب ء = ----

----

٣ فى الشكل المقابل

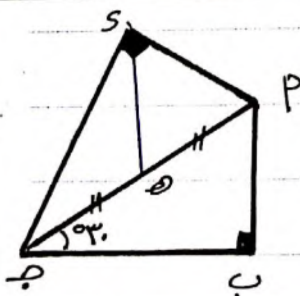


ق ($\hat{ب}$) = ----

ق ($\hat{ج}$) = ----

△ أب ء ---- الأضلاع

٤ فى الشكل المقابل



اثبت أن

أب = ء هـ

الوحدة الرابعة ③

المثلث المتساوى الساقين

ملاحظات

أنواع المثلث من حيث الزوايا

① حاد الزوايا
② منفرج الزاوية
③ قائم الزاوية

أنواع المثلث من حيث الأضلاع

① مختلف الأضلاع
② متساوى الساقين
③ متساوى الأضلاع

نظرية المثلث المتساوى الساقين

نظرية (١)

زاويتا القاعدة فى المثلث المتساوى الساقين متطابقتان

" ربنا يخليني ليكم "

الاثبات مهم



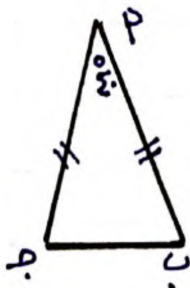
* المعطيات :
△ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ

* المطلوب :
إثبات أن (ب̂) ≡ (جـ̂)

* العمل :
نرسم أ ء ⊥ ب جـ ويقطعه فى ء

* البرهان *
△△ أ ء ب ، أ ء جـ
فيهما
ق(أ ء̂ ب) = ق(أ ء̂ جـ) = ٩٠° قائمة
أ ب = أ جـ الوتر معطى
أ ء ضلع مشترك
△ أ ء ب ≡ △ أ ء جـ
وينتج أن
ق (ب̂) ≡ ق (جـ̂) #

مثال ١ فى كل من الأشكال اللى جاية أوجد قياس الزاوية المطلوبة



① أوجد ق(ب̂)
١٨٠ − ٤٠ = ١٤٠°
∴ ق(ب̂) = ق(جـ̂) = ١٤٠ / ٢ = ٧٠°



١) زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين من الممكن أن تكون حادة أو قائمة أو منفرجة

٢) ولكن زوايا القاعدة تكون حادة فقط

٣) فى أى مثلث متساوى الساقين إذا وجد قياس احدى زواياه = $60°$ فإن المثلث يكون متساوى الأضلاع

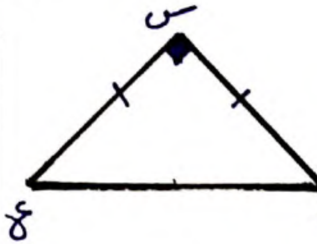
٤) فى المثلث المتساوى الأضلاع تكون زواياه الثلاثة متساوية وقياس كل منها = $60°$

٥) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث = مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين ماعدا المجاورة لها.

٦) قياس الزاوية الخارجة عن المثلث المتساوى الأضلاع = $120°$

"إن شاء الله هتكون أشطر الطلاب"

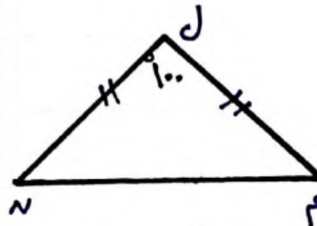
٢) أوجد ق($\hat{ص}$)



$180 - 90 = 90°$

∴ ق($\hat{ص}$) = ق($\hat{ع}$) = $\frac{90}{2}$ = $45°$

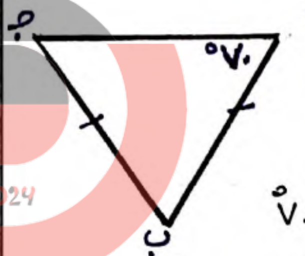
٣) أوجد ق($\hat{م}$)



$180 - 100 = 80°$

∴ ق($\hat{م}$) = ق($\hat{ن}$) = $\frac{80}{2}$ = $40°$

٤) أوجد ق($\hat{ب}$)



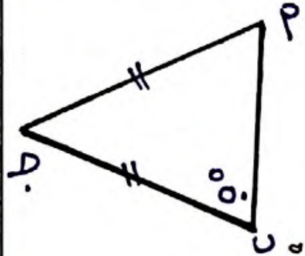
∵ أ ب = ب جـ

∴ ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{جـ}$) = $70°$

∴ $70 + 70 = 140°$

∴ ق($\hat{ب}$) = $180 - 140 = 40°$

٥) أوجد ق($\hat{جـ}$)

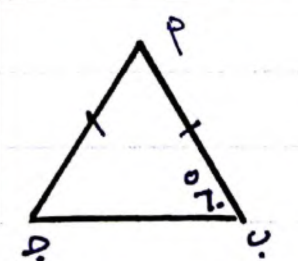


ق($\hat{أ}$) = ق($\hat{ب}$) = $50°$

∴ $50 + 50 = 100°$

∴ ق($\hat{جـ}$) = $180° - 100° = 80°$

٦) أوجد ق($\hat{أ}$)



ق($\hat{ب}$) = ق($\hat{جـ}$) = $60°$

$60 + 60 = 120°$

∴ ق($\hat{أ}$) = $180° - 120° = 60°$

مثال ٢ Δ ا ب جـ متساوى الساقين

ق(∠ا) = ١٢٠° أوجد ق(∠ب)

الحل

طبعاً يا أحبابى زاوية ا منفرجة

واحنا اتفقنا ان زاوية الرأس

ممكن تكون حادة أو قائمة أو منفرجة

إنما القاعدة حادة فقط

لذلك (∠ا) هى زاوية الرأس

ق(∠ب) = ١٨٠° − ١٢٠° = $\frac{٦٠}{٢}$° = ٣٠°

مثال ٣ Δ ا ب جـ متساوى الساقين

ق(∠ب) = ١٠٠° أوجد ق(∠ا)

الحل

ق(∠ا) = ١٨٠° − ١٠٠° = $\frac{٨٠}{٢}$° = ٤٠°

مثال ٤ Δ ا ب جـ فيه ا ب = ا جـ

ق(∠ا) = ٦٠° فإنه

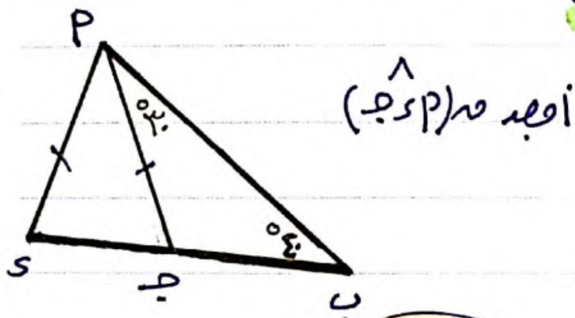
المثلث يكون ..... متساوى الأضلاع

الحل

المثلث المتساوى الساقين الذى فيه

زاوية ٦٠° يكون متساوى الأضلاع

مثال ٥ فى الشكل المقابل



أوجد ق(∠ا د جـ)

الحل

∵ (∠ا جـ د) خارجة عن Δ ا ب جـ

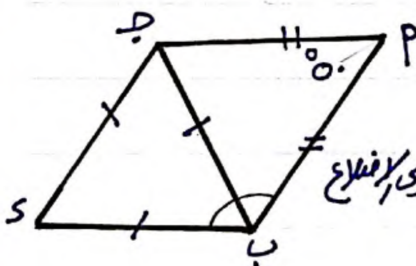
∴ ق(∠ا جـ د) = ٤٠° + ٣٠° = ٧٠°

∵ ا جـ = ا د

∴ Δ ا جـ د متساوى الساقين

∴ ق(∠ا جـ د) = ق(∠ا د جـ) = ٧٠°

مثال ٦ فى الشكل المقابل



Δ جـ ب د متساوى الأضلاع

ق(∠ا) = ٥٠°

ا ب = ا جـ

أوجد ق(∠ا ب د)

الحل

∵ Δ جـ ب د متساوى الأضلاع

∴ ق(∠جـ ب د) = ٦٠° ← ①

فى Δ ا ب جـ

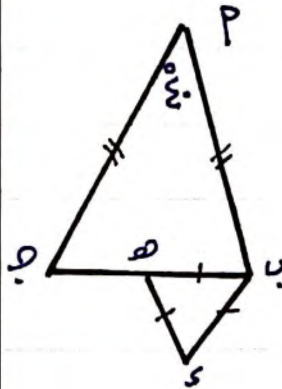
∵ ا ب = ا جـ ∴ ق(∠ا ب جـ) = ق(∠ا جـ ب)

١٨٠° − ٥٠° = $\frac{١٣٠}{٢}$ = ٦٥° ← ②

$\therefore$ ق(أ ب̂ د) = ٦٠° + ٦٥° = ١٢٥°

مثال في الشكل المقابل

أوجد ق(أ ب̂ د)



الحل

في △ أ ب جـ المتساوي الساقين

$\because$ أب = أجـ $\therefore$ ق(أ جـ̂ ب) = ق(أ ب̂ جـ) = $\frac{١٨٠ - ٤٠}{٢} = \frac{١٤٠}{٢}$ = ٧٠° ← ①

في △ ب د هـ المتساوي الأضلاع

ق(هـ ب̂ د) = ٦٠° ← ②

$\therefore$ ق(أ ب̂ د) = ٧٠° + ٦٠° = ١٣٠°

تدريب في الشكل المقابل

△ أ ب جـ متساوي الأضلاع

△ ب د جـ متساوي الساقين

أوجد ق(أ د̂ جـ)

حلها وهنشوفها في الحصة



① أكمل

١) زاويتا القاعدة في المثلث المتساوي الساقين ----

٢) قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الأضلاع = ----

٣) قياس الزاوية الخارجية عن المثلث المتساوي الأضلاع = ----

٤) △ أ ب جـ متساوي الساقين فيه ق(جـ̂) = ١٢٠° فإن ق(أ̂) = ----

② أوجد قياس الزاوية المطلوبة

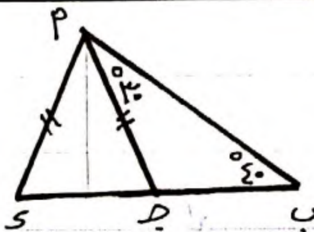
① ② ③

س = ... ص = ... أ = ---- ب = ---- س = ---- ص = ----

③ أوجد

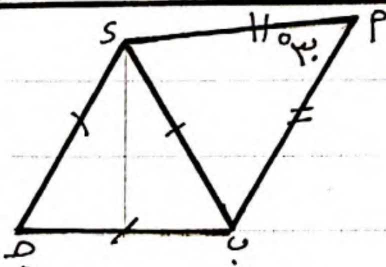
ق(د̂)

ق(هـ أ̂ د)



④ أوجد

ق(أ ب̂ جـ)





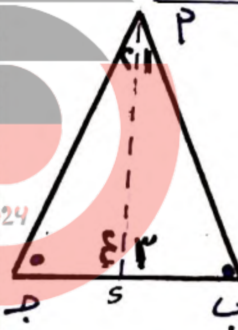
الوحدة الرابعة ٤

تابع المثلث المتساوى الساقين

عكس نظرية (٤)

إذا تطابقت زاويتان فى مثلث فإن الضلعين المقابلين لهاتين الزاويتين يكونان متطابقان ويكون المثلث متساوى الساقين.

إثبات عكس النظرية



* المعطيات:

ق (ب̂) = ق (ج̂)

* المطلوب:

إثبات أن أب = أ ج

* العمل:

نرسم أد ينصف (أ̂) ويقطع ب ج فى د

* البرهان *

∵ ق (ب̂) = ق (ج̂)

، ق (١̂) = ق (٢̂) لأن أد منصف

∴ ق (٣̂) = ق (٤̂)

لأنه مكملات الزوايا المتساوية تكون متساوية

∵ △△ أ د ب ، أ د ج

فيهما } ق (١̂) = ق (٢̂)، ق (٣̂) = ق (٤̂)، أد ضلع مشترك

∴ △ أ د ب ≡ △ أ د ج

وينتج أن

أب = أ ج #.

نتيجة

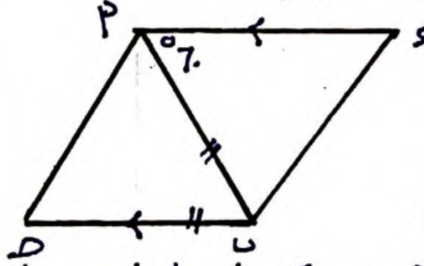
إذا تطابقت قياسات زوايا مثلث فإنه يكون متساوى الأضلاع.

ملحوظة

١ المثلث المتساوى الساقين الذى قياس إحدى زواياه °٦٠ يكون متساوى الأضلاع

٢ المثلث القائم الزاوية الذى فيه زاوية °٤٥ يكون متساوى الساقين

مثال ١ فى الشكل المقابل



أب = ب ج

أد // ب ج

اثبت أن △ أب ج متساوى الأضلاع

الحل

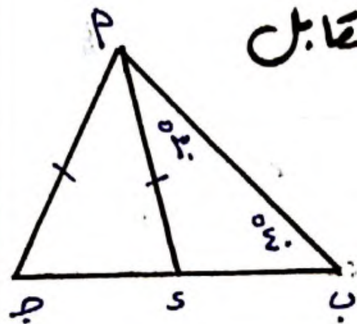
∵ أد // ب ج ، أب قاطع لهما

∴ ق (أ̂ ب ج) = °٦٠ بالتبادل

∵ △ (أب ج) متساوى الساقين فيه ق (أ̂ ب ج) = °٦٠

∴ △ أب ج متساوى الأضلاع #

مثال ٢ في الشكل المقابل



اثبت أن

أب = جـ ب

الحل

في △ أ د جـ

∵ ق(أ د̂ جـ) خارجة عن △ أ ب د

∴ ق(أ د̂ جـ) = ٤٠° + ٣٠° = ٧٠°

، ∵ أ د = أ جـ ∴ ق(جـ̂) = ٧٠°

∴ ق(د أ̂ جـ) = ١٨٠° - (١٤٠°) = ٤٠°

في △ أ ب جـ الكبير

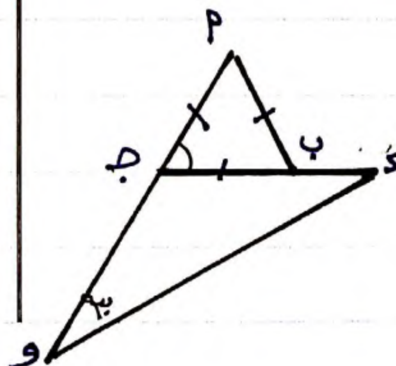


∵ ق(أ̂) = ٣٠° + ٤٠° = ٧٠°

، ق(جـ̂) = ٧٠°

∴ أب = جـ ب #

مثال ٢ في الشكل المقابل



اثبت أن

△ د جـ و

متساوي الساقين

الحل

في △ أ ب جـ المتساوي الأضلاع

ق(أ ب̂ جـ) = ٦٠°

و ب خارجة عن △ د و جـ

∴ ق(د̂) = ٦٠° - ٣٠° = ٣٠°

∴ △ د جـ و

فيه ق(د̂) = ق(و̂)

∴ جـ د = جـ و

ويكون المثلث متساوي الساقين #

مثال ٣ في الشكل المقابل

أب = أ جـ

ب د ينصف (ب̂)

جـ د ينصف (جـ̂)

اثبت أن △ د ب جـ متساوي الساقين

الحل

∵ أب = أ جـ ∴ △ أ ب جـ متساوي الساقين

∴ ق(ب̂) = ق(جـ̂)

∵ ب د ينصف (ب̂) ، جـ د ينصف (جـ̂)

∴ $\frac{1}{2}$ ق(ب̂) = $\frac{1}{2}$ ق(جـ̂)

∴ ق(د ب̂ جـ) = ق(د جـ̂ ب)

∴ △ د ب جـ متساوي الساقين

الواجب

١ أكمل

١) إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما يكونان .... ويكون المثلث ....

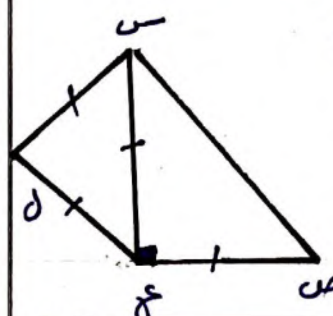
٢) إذا تطابقت زاويتا مثلث فإنه يكون .... المثلث القائم الذي قياس إحدى زواياه ٤٥° يكون ....

٣) المثلث المتساوي الساقين الذي قياس إحدى زواياه ٦٠° يكون ....

٤) المثلث ا ب جـ فيه ا ب = ب جـ ، ق(∠ا) = ٦٠° فإذا كان ا ب = ٥ سم فإن محيط △ ا ب جـ = ...

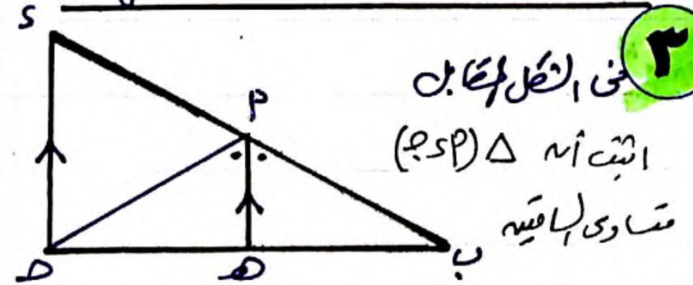
٥) مثلث فيه زاويتان ٨٠° ، ٥٠° فإن هذا المثلث يكون ....

٢ في الشكل المقابل



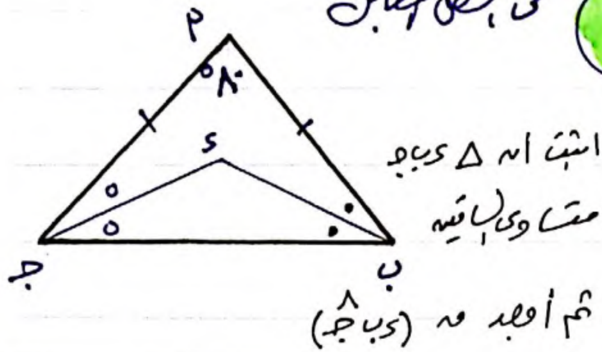
أوجد ق(∠ص س ل)

٣ في الشكل المقابل



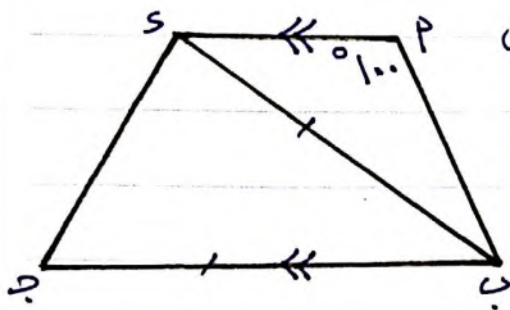
اثبت أن △(ا د جـ) متساوي الساقين

٤ في الشكل المقابل



اثبت أن △ د ب جـ متساوي الساقين ثم أوجد ق(∠د ب جـ)

٥ في الشكل المقابل



اثبت أن △ ا ب د متساوي الساقين

ادعو معايا

اللهم اجعلني مستقيماً في حياتي.
واجعلني في زاوية قائمة على الخير
ولا تجعلني في مجموعة خالية.
ولا تجعل الدنيا حادة على.
واجعلني موازياً لعبادك الصالحين
وهو المطلوب يا أرحم الراحمين

الوحدة الرابعة ٥

نتائج على نظريات المثلث المتساوى الساقين

نتيجة (١)

متوسط المثلث المتساوى الساقين المرسوم من الرأس ينصف زاوية الرأس ويكون عمودياً على القاعدة.

مثلاً

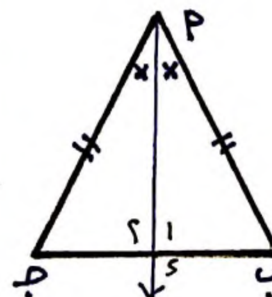


إذا كانت
ق (أ) = ٨٠°
فإن ق (١) = ق (٢) = ٤٠°
ويكون ق (٣) = ق (٤) = ٩٠°

نتيجة (٢)

منصف زاوية الرأس فى المثلث المتساوى الساقين ينصف القاعدة ويكون عمودياً عليها

مثلاً

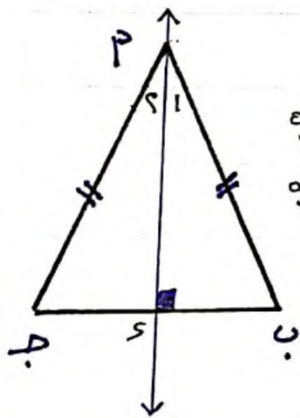


إذا كانت
ب جـ = ١٠ سم
فإن ب د = د جـ = ٥ سم
ق (١) = ق (٢) = ٩٠°

نتيجة (٣)

المستقيم المرسوم من رأس مثلث متساوى الساقين عمودياً على القاعدة ينصف كلاً من القاعدة وزاوية الرأس.

مثلاً



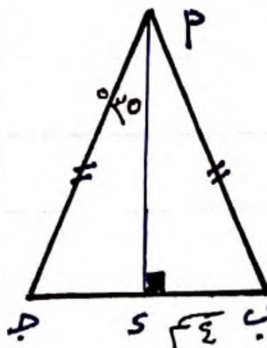
إذا كانت ق (أ) = ٧٠°
فإن ق (١) = ق (٢) = ٣٥°
وإذا كان ب جـ = ١٢ سم
فإن ب د = د جـ = ٦ سم

الشكل ده هيساعدك على حفظ النتائج

متوسط منصف القاعدة	منصف زاوية الرأس	عمودى على القاعدة
(١)	✓	✓
✓	(٢)	✓
✓	✓	(٣)

يا سلام عليك يا أبو أدهم يا رايق

مثال ١
فى الشكل المقابل



أوجد ق (ب م ء)
ق (ب)
طول ب جـ

الحل

∵ △ م ب جـ متساوى الساقين
فيه م ء ⊥ ب جـ
∴ م ء ينصف (م) وينصف ب جـ
∴ ق (ب م ء) = ٣٥°

فى △ م ب ء
ق (ب) = ١٨٠° − [٩٠° + ٣٥°] = ٥٥°

∵ ب ء = ٤ سم ∴ ء جـ = ٤ سم
∴ ب جـ = ٨ سم



١) محور تماثل القطعة المستقيمة
هو المستقيم العمودى عليها من منتصفها

٢) أى نقطة على محور تماثل القطعة المستقيمة
تكون على بعدين متساويين من طرفيها

٣) إذا كانت نقطة على بعدين متساويين من طرفى قطعة مستقيمة فإن هذه النقطة تقع على محور هذه القطعة المستقيمة

٤) عدد محاور تماثل المثلث

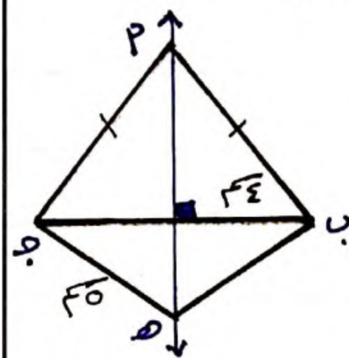
المختلف الأضلاع	صفر
المتساوى الساقين	١
المتساوى الأضلاع	٣

٥) المثلث القائم الزاوية الذى إحدى زواياه ٤٥° له محور تماثل واحد

٦) فى أى مثلث متساوى الساقين إحدى زواياه ٦٠° يكون له ٣ محاور تماثل

٧) △ م ب جـ فيه ق (م) = ٤٠° ، ق (ب) = ٧٠° فإن المثلث له محور تماثل واحد
١٨٠ − (٤٠° + ٧٠°) = ٧٠° متساوى الساقين

مثال ٢ في الشكل المقابل



١ أوجد طول $\overline{بجـ}$

٢ اثبت أن $\overleftrightarrow{أهـ}$ محور تماثل $\overline{بجـ}$

٣ أوجد طول $\overline{جـهـ}$

الحل

∵ △ أبجـ متساوي الساقين ، $\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$

∴ بجـ = ٨ سم

△ بهـجـ

∵ $\overline{هـد} \perp \overline{بجـ}$ وينصفه

∴ △ بهـجـ متساوي الساقين

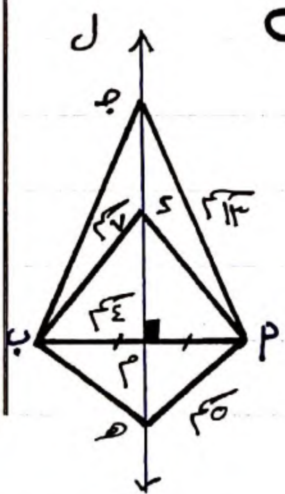
∴ هـب = هـجـ ، ∵ أب = أجـ

∴ $\overleftrightarrow{أهـ}$ محور تماثل $\overline{بجـ}$

∴ بهـ = جـهـ = ٥ سم

لأنه أي نقطة على محور القطعة تكون على بعدين متساويين من طرفيها

مثال ٣ في الشكل المقابل



أوجد طول كل من

$\overline{جـب}$ ، $\overline{أد}$

$\overline{هـب}$ ، $\overline{أم}$

الحل

∵ جـ ، د ، هـ ، م ∈ $\overleftrightarrow{ل}$ محور $\overline{أب}$

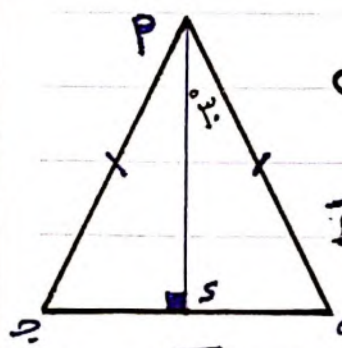
∴ أد = دب = ٧ سم

جـب = جـأ = ١٣ سم

هـب = هـأ = ٥ سم

مأ = مب = ٤ سم

مثال ٤ في الشكل المقابل



١ أوجد طول $\overline{بد}$ ، $\overline{أد}$

٢ ما عدد محاور △ أبجـ ؟

٣ مساحة △ أبجـ ؟

الحل

∵ △ أبجـ متساوي الساقين فيه $\overline{أد} \perp \overline{بجـ}$

∴ $\overline{أد}$ ينصف $(\hat{أ})$ وينصف بجـ

∴ بد = ٥ سم

في △ أبد

$\overline{بد}$ مقابل للزاوية ٣٠°

∴ بد = $\frac{1}{2}$ أب

* ∴ أب = ١٠ سم ∴ أد = $\sqrt{(10)^2-(5)^2}$

∴ أد = ٥$\sqrt{3}$ سم

* عدد محاور تماثل △ أبجـ = ٣

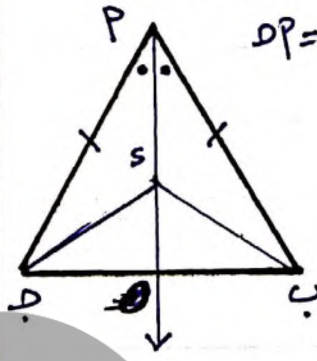
لأنه مثلث متساوي الساقين إحدى زواياه = ٦٠° يكون متساوي الأضلاع

مساحة △ أ ب جـ

= $\frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ٣٦٥ = ١٨٢٥ سم²

مثل ٥ فى الشكل المقابل



△ أ ب جـ فيه أ ب = أ جـ

اثبت أن

١) ب هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

٢) ب ء = جـ ء

الحل

فى △ أ ب جـ ∵ أ ب = أ جـ

، أ هـ ينصف ($\hat{أ}$)

∴ أ هـ ⊥ ب جـ

، أ هـ ينصف ب جـ

∴ ب هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ # أولاً

∵ أ هـ ⊥ ب جـ من منتصفها

∴ أ هـ محوراً لـ ب جـ

∵ ء ∈ أ هـ

∴ ب ء = جـ ء # ثانياً

الواجب

١ أكمل

١) المستقيم المار برأس المثلث المتساوى الساقين عمودياً على القاعدة ينصف ....

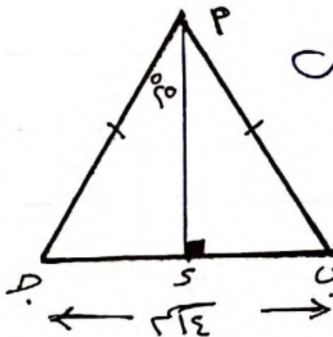
٢) أى نقطة على محور تماثل القطعة تكون على بعدين .... من طرفيها

٣) عدد محاور تماثل المثلث المختلف الأضلاع .... المتساوى الساقين .... المتساوى الأضلاع ....

٤) △ أ ب جـ فيه ق($\hat{أ}$) = ٥٠° ، ق($\hat{ب}$) = ٩٠° فإن △ أ ب جـ عدد محاور تماثله = ...

٥) إذا كانت أ تقع على محور تماثل س ص فإن أ س .... أ ص

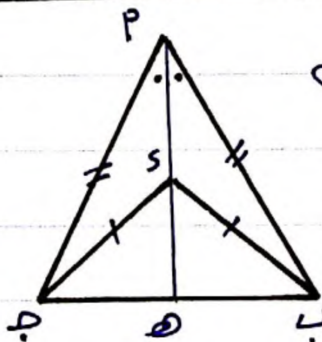
٢ فى الشكل المقابل



١) أوجد ق($\hat{ب أ ء}$)

٢) ب ء

٣ فى الشكل المقابل



اثبت أن

١) أ هـ محور ب جـ

٢) ب هـ = هـ جـ

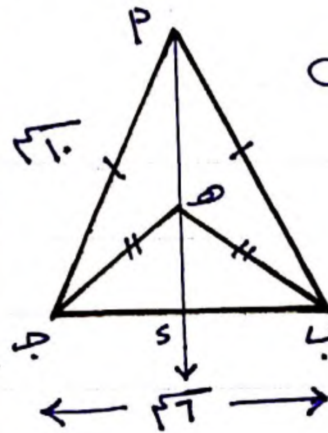
٤ فى الشكل المقابل

اثبت أن

* ب ء = ء جـ

اوجد طول كلاً من

* ء ب ، ء أ



٥

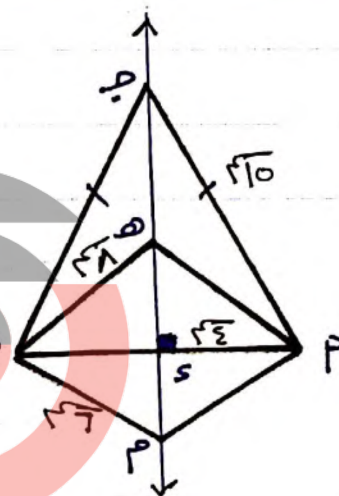
أوجد طول

ب هـ

أ هـ

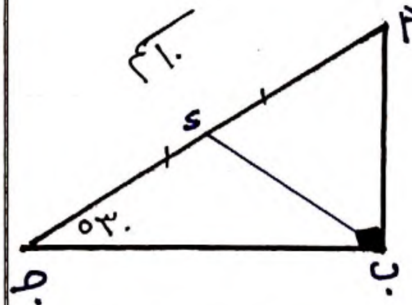
أ ب

أ م



٦ فى الشكل المقابل

أوجد محيط △ أ ب ء



ثم اثبت ان △ أ ب ء متساوى الأضلاع

* اتحدى انك تعرف * جمع الكلمات دى

حليب ـ اخطبوط

وحيد القرن ـ كلينكس

بترول ـ بيبسى

* تعلمت من الرياضيات *

(١) ان العدد السالب كلما كبرت أرقامه كلما صغرت قيمته كالمتعاليين على الناس : كلما ازدادوا تعاليا كلما صغروا فى عيون غيرهم

(٢) انه يمكننا الوصول لنتيجه صحيحة بأكثر من طريقة فلا تظن أنك وحدك صاحب الحقيقه وان كل من خالفك مخطئ

(٣) أن لكل مجهول قيمة فلا تستحقر أحد فأنت لا تعرف قيمته

الوحدة الخامسة ١

التبايـــن

إذا كان أب = ٥ سم ، س ص = ٣ سم

فإن أب > س ص

أو س ص < أب

مسلمات التباين

لأي أربعة أعداد أ ، ب ، جـ ، د

١) إذا كان أ > ب

فإن أ + جـ > ب + جـ

أ − جـ > ب − جـ

إذا كان جـ > ٠ : أ × جـ > ب × جـ

٢) إذا كان أ > ب ، ب > جـ

فإن أ > جـ

٣) إذا كان أ > ب ، جـ > د

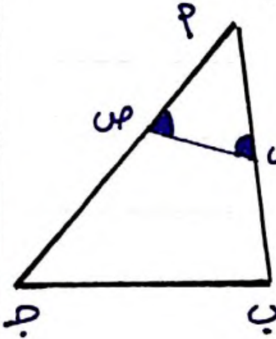
فإن أ + جـ > ب + د

ملحوظة

قياس أي زاوية خارجة للمثلث أكبر من قياس أي زاوية داخلة ما عدا المجاورة لها.

مثال ١

في الشكل المقابل



أجـ > أب ، ق($\hat{أ}$س ص) = ق($\hat{أ}$ص س)

اثبت أن

ص جـ > س ب

الحل

في △ أ ب جـ

∵ أجـ > أب ⟵ (١)

وفي المثلث أ س ص

∵ ق($\hat{أ}$س ص) = ق($\hat{أ}$ص س)

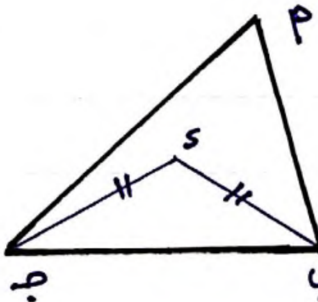
∴ أ س = أ ص ⟵ (٢)

بالطرح أجـ − أص > أب − أس

∴ ص جـ > س ب #

مثال ٢

في الشكل المقابل



ق($\hat{ب}$) > ق($\hat{جـ}$)

، ب د = د جـ

اثبت أن ق($\hat{أ ب د}$) > ق($\hat{أ جـ د}$)

الحل

∵ د ب = د جـ ∴ ق(∠د ب جـ) = ق(∠د جـ ب) ← ①

∵ ق(∠أ ب جـ) > ق(∠أ جـ ب) ← ② معطى

بطرح ①، ②

∴ ق(∠أ ب جـ) - ق(∠د ب جـ) > ق(∠أ جـ ب) - ق(∠د جـ ب)

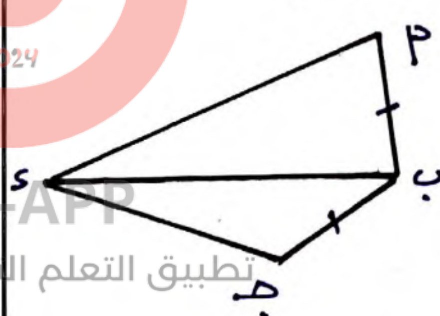
∴ ق(∠أ ب د) > ق(∠أ جـ د) #

مثال ٢

فى الشكل المقابل

أ د > جـ د

اثبت أن



محيط △ أ ب د > محيط △ ب د جـ

الحل

لاحظ أن محيط أى شكل = مجموع أطوال أضلاعه

فى △ أ ب د ، فى △ جـ ب د

أ ب = ب جـ

ب د مشترك

أ د > جـ د

∴ أ ب + ب د + أ د > ب جـ + ب د + جـ د

∴ محيط △ أ ب د > محيط △ ب د جـ #

الواجب

١

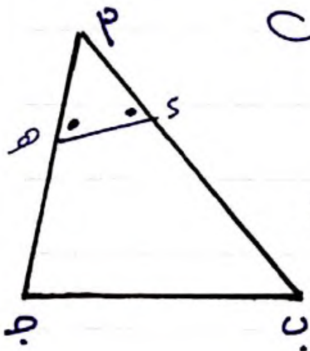
فى الشكل المقابل

أ ب > أ جـ

ق(∠أ د هـ) = ق(∠أ هـ د)

اثبت أن

د ب > هـ جـ



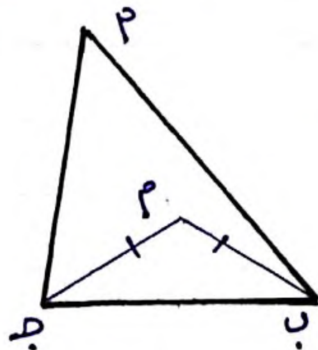
٢

فى الشكل المقابل

ق(∠جـ) ، ق(∠ب)

م ب = م جـ

اثبت أن ق(∠أ جـ م) > ق(∠أ ب م)



٣

أكمل بوضع > أو <

① إذا كان س > ص و جـ عدد موجب

فإن س + جـ ... ص + جـ

س - جـ ... ص - جـ

س × جـ ... ص × جـ

② إذا كان أ > ب ، ب > جـ

فإن أ ... جـ

الوحدة الخامسة ②

المقارنة بين قياسات الزوايا فى المثلث

نظرية (٥)

إذا اختلف طولا ضلعين فى مثلث فإن أكبرهما فى الطول تقابله زاوية أكبر فى القياس من الزاوية المقابلة للآخر.

ملاحظات

① أكبر الزوايا تقابل أكبر الأضلاع

② أصغر الزوايا تقابل أصغر الأضلاع

③ إذا كان قياس زاوية أصغر من مجموع الزاويتين الأخريين فإنها تكون حادة

④ إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث تساوى مجموع الأخريين فإنها تكون قائمة

⑤ إذا كان قياس إحدى زوايا مثلث أكبر من مجموع الأخريين فإنها تكون منفرجة

⑥ أى مثلث يحتوى على زاويتين على الأقل حادة

⑦ أى مثلث يحتوى على زاوية واحدة قائمة على الأكثر

⑧ أى مثلث يحتوى على زاوية واحدة منفرجة على الأكثر

⑨ لا يمكن للمثلث أن يحتوى على زاوية قائمة وأخرى منفرجة

مثال ١ رتب تصاعدياً قياسات زوايا △ أ ب جـ الذى فيه

أ ب = ٦ سم ب جـ = ٥ سم أ جـ = ٧ سم

الحل

ترتيب الأضلاع ب جـ < أ ب < أ جـ

ترتيب الزوايا ق(أ) < ق(جـ) < ق(ب)

الحرف اللى ناقص من الضلع بيكون هو الزاوية

مثال ٢ رتب تنازلياً زوايا المثلث س ص ع

س ص = ٢٠ سم ص ع = ٢٨ سم

س ع = ١٢ سم

الحل

ترتيب الأضلاع تنازلياً س ع > س ص > ص ع

ترتيب الزوايا

∴ ق ($\hat{ص}$) > ق ($\hat{ع}$) > ق ($\hat{س}$)

مثال ٣ رتب زوايا △ أ ب جـ تصاعدياً

أ ب = ٥ سم ب جـ = ٣ سم

أ جـ = ٤ سم

الحل

∵ ب جـ < أ جـ < أ ب

∴ ق ($\hat{أ}$) < ق ($\hat{ب}$) < ق ($\hat{جـ}$)

مثال ٤ فى الشكل المقابل

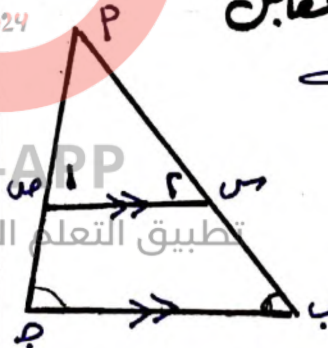
△ أ ب جـ فيه

أ ب > أ جـ

، س ص // ب جـ

اثبت أن

ق (أ $\hat{ص}$ س) > ق (أ $\hat{س}$ ص)



الحل

∵ أ ب > أ جـ ∴ ق

∴ ق ($\hat{جـ}$) > ق ($\hat{ب}$) ← (١)

، ∵ س ص // ب جـ

∴ ق ($\hat{١}$) = ق ($\hat{جـ}$) ، ق ($\hat{٢}$) = ق ($\hat{ب}$)

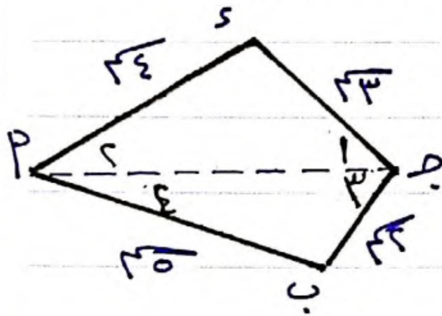
بالتناظر ← (٢)

من ① ، ②

∴ ق ($\hat{١}$) > ق ($\hat{٢}$)

∴ ق (أ $\hat{ص}$ س) > ق (أ $\hat{س}$ ص) #

مثال ٥ فى الشكل المقابل



اثبت أن

ق (د $\hat{جـ}$ ب) > ق (د $\hat{أ}$ ب)

الحل

فى △ أ جـ د

∵ أ د > د جـ

∴ ق ($\hat{١}$) > ق ($\hat{٢}$) ← ①

فى △ أ ب جـ

∵ أ ب > ب جـ

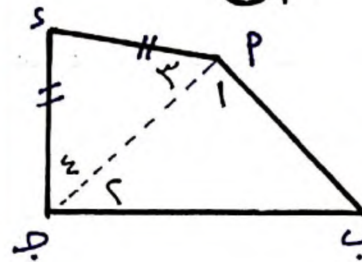
∴ ق ($\hat{٣}$) > ق ($\hat{٤}$) ← ②

بجمع العلاقتين ① ، ②

∴ ق (د $\hat{جـ}$ ب) > ق (د $\hat{أ}$ ب) #

مثال ٦

فى الشكل المقابل



أ ب جـ ء شكل رباعى

فيه

أ ء = جـ ء

، ب جـ > أ ب

اثبت أن

ق (أ^) > ق (جـ^)

الحل

العمل نرسم $\overline{أ جـ}$

فى Δ أ ب جـ

∵ ب جـ > أ ب

∴ ق (١^) > ق (٢^) ← (١)

فى Δ أ ء جـ

∵ أ ء = ء جـ

∴ ق (٣^) = ق (٤^) ← (٢)

بإضافة (١) ، (٢)

∴ ق (أ^) > ق (جـ^) #

الواجب

(١) رتب تصاعدياً قياسات زوايا

Δ أ ب جـ إذا كان

(٢) أ ب = ٣ سم ، ب جـ = ٢ سم ، أ جـ = ٤ سم

(٣) أ ب = ٥ سم ، أ جـ = ٧ سم ، ب جـ = ١٠ سم

(٤) أ ب = ٩ سم ، أ جـ = ١٠ سم ، ب جـ = ٦ سم

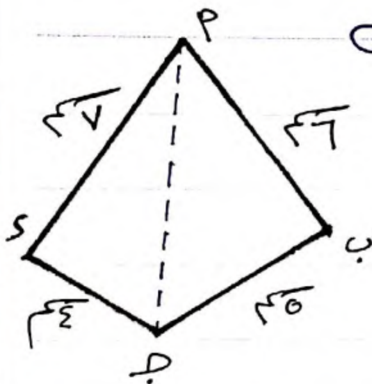
(٥) فى Δ أ ب جـ الذى فيه أ ب = ٩ سم

أ جـ = ٥ سم ، ب جـ = ١١ سم

فإن أصغر زواياه ----

وأكبر زواياه ----

(٢) فى الشكل المقابل



اثبت أن

ق (جـ^) > ق (أ^)

(٣) فى الشكل المقابل

س ص > س ع

$\overline{ء هـ}$ // $\overline{ص ع}$

اثبت أن

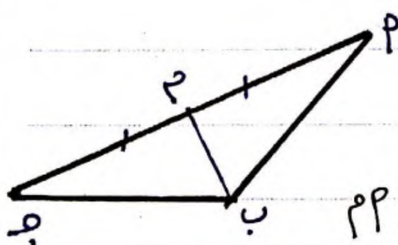
ق (س ء هـ^) > ق (س هـ ء^)

(٤) فى الشكل المقابل

م منتصف $\overline{أ جـ}$

ب م < أ م

أثبت أن ق (ب^) منفرجة



المقارنة بين أطوال الأضلاع فى المثلث

الوحدة الخامسة ٣

عكس نظرية (٥)

إذا اختلف قياسا زاويتين في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع أكبر في الطول من الضلع المقابل للأخرى

ملاحظات ونتائج

١) في المثلث القائم الزاوية أكبر الأضلاع طولاً هو الوتر

٢) في المثلث المنفرج الزاوية أكبر الأضلاع طولاً هو الضلع المقابل للزاوية المنفرجة

٣) طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من نقطة خارج مستقيم معلوم إلى هذا المستقيم أصغر من طول أي قطعة مرسومة من النقطة إلى المستقيم

أب < أجـ
أب < أء

(شكل: مثلث فيه أ ب عمودي على ء جـ)

٤) بعد نقطة عن مستقيم هو طول القطعة المستقيمة العمودية المرسومة من النقطة إلى المستقيم

مثال ١

Δ أ ب جـ فيه ق($\hat{أ}$) = ٤٠° ، ق($\hat{ب}$) = ٦٠° رتب أطوال أضلاعه تصاعدياً

الحل

ق($\hat{جـ}$) = ١٨٠° − (٤٠° + ٦٠°) = ٨٠°

∵ ق($\hat{أ}$) < ق($\hat{ب}$) < ق($\hat{جـ}$)

∴ ب جـ < أ جـ < أ ب

مثال ٢

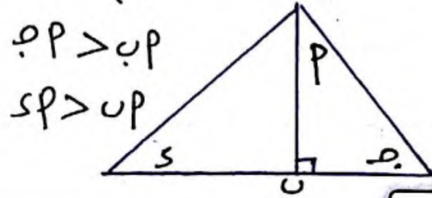
Δ س ص ع فيه ق($\hat{س}$) = ١٠٠° ، ق($\hat{ع}$) = ٦٠° رتب أطوال أضلاعه تصاعدياً

الحل

ق($\hat{ص}$) = ١٨٠° − (١٠٠° + ٦٠°) = ٢٠°

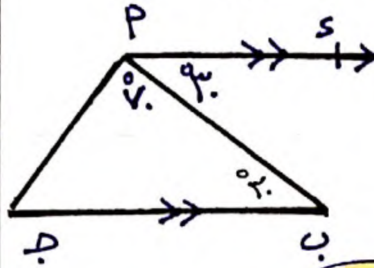
∵ ق($\hat{ص}$) < ق($\hat{ع}$) < ق($\hat{س}$)

∴ س ع < س ص < ص ع



مثال ٣

فى الشكل المقابل



اثبت أن أب > أجـ

الحل

∵ أد // ب جـ

∴ ق(∠ب) = ٣٠° بالتبادل

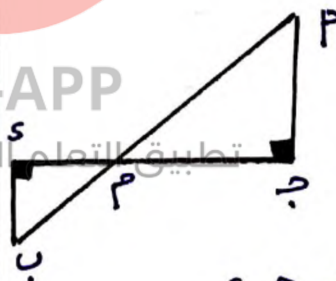
∴ ق(∠جـ) = ١٨٠° − (٣٠° + ٧٠°) = ٨٠°

∵ ق(∠جـ) > ق(∠ب)

∴ أب > أجـ #

مثال ٤

فى الشكل المقابل



اثبت أن أب > جـ د

الحل

فى △أ جـ م   أم الوتر

∴ أم > م جـ ← (١)

فى △م د ب   م ب الوتر

∴ م ب > م د ← (٢)

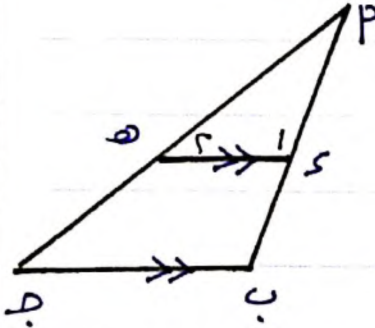
بجمع (١) ، (٢)

∴ أم + م ب > م جـ + م د

∴ أب > جـ د #

مثال ٥

فى الشكل المقابل



△أ ب جـ منفرج الزاوية فى ب ، د هـ // ب جـ

اثبت أن أهـ > أد

الحل

فى △أ ب جـ

∵ ق(∠ب) منفرجة

∴ ق(∠ب) > ق(∠جـ) ← (١)

∵ د هـ // ب جـ

∴ ق(∠١) = ق(∠ب) ، ق(∠٢) = ق(∠جـ) بالتناظر ← (٢)

من (١) ، (٢)

∴ ق(∠أ د هـ) > ق(∠أ هـ د)

∴ أهـ > أد #

الواجب

١ أكمل

١ إذا اختلف قياسا زاويتان في مثلث فأكبرهما في القياس يقابلها ضلع ....

٢ وإذا اختلف طولا ضلعين في مثلث فأكبرهما في الطول تقابله زاوية ....

٣ أصغر الزوايا تقابل ....

٤ أكبر أضلاع المثلث القائم هو ....

٥ أكبر أضلاع المثلث المنفرج هو ....

٦ إذا كان △ أ ب جـ

ق (∠أ) = ق (∠ب) + ق (∠جـ) فإن (∠أ) ....

ق (∠أ) > ق (∠ب) + ق (∠جـ) فإن (∠أ) ....

ويكون أكبر الأضلاع طولاً ....

٧ إذا كان أ ب > ب جـ

فإن ق (∠جـ) .... ق (∠أ)

٨ إذا كان س ص > ص ع

فإن ق (∠س) .... ق (∠ع)

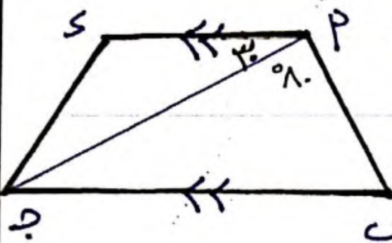
٢ رتب تصاعدياً أطوال △ أ ب جـ

١ ق (∠أ) = ٣٠° ، ق (∠ب) = ٨٠°

٢ ق (∠أ) = ١٠٠° ، ق (∠جـ) = ٥٠°

٣ ق (∠ب) = ٦٠° ، ق (∠جـ) = ٤٠°

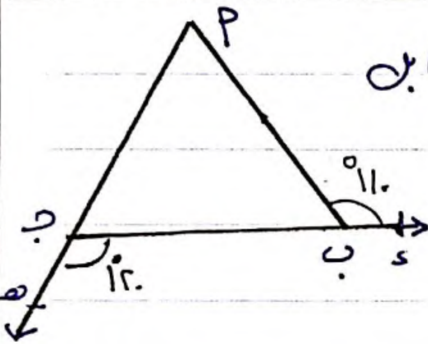
٣ في الشكل المقابل



اثبت أن

ب جـ > أ ب

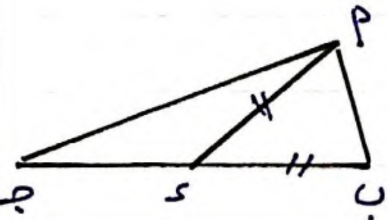
٤ في الشكل المقابل



اثبت أن

أ ب > ب جـ

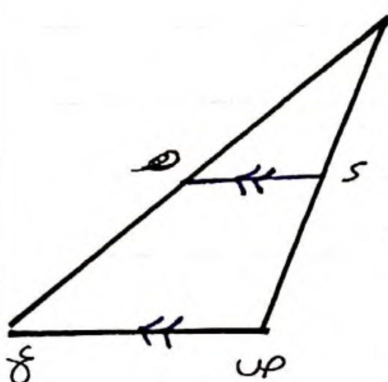
٥ في الشكل المقابل



اثبت أن

ب د > أ جـ

٦ في الشكل المقابل



ق (∠ص) > ق (∠ع)

اثبت أن

س هـ > س د

متباينة المثلث

الوحدة الخامسة ④

ملاحظات هامة

① فى أى مثلث مجموع أى ضلعين أكبر من الضلع الثالث

② فى أى مثلث طول أى ضلع أصغر من مجموع الضلعين الآخرين

③ طول أى ضلع فى مثلث أصغر من نصف محيط المثلث

④ الفرق بين الضلعين < طول الضلع < مجموع الضلعين

⑤ إذا كان الضلعان ٣ ، ٥
فإن الضلع الثالث ∋]٢ ، ٨[
٥ - ٣ = ٢   ٥ + ٣ = ٨
٢ < الضلع الثالث < ٨

⑥ △ متساوى الساقين فيه ضلعين فيه ٣ ، ٦ فإن الضلع الثالث ٦
علشان يكون مجموع أى ضلعين أكبر من الثالث

⑦ △ له محور تماثل واحد أضلاعه ٤ ، ٨ ، ....
الضلع الثالث = ٨
لأنه متساوى الساقين لأن له محور تماثل واحد

⑧ علشان تعرف الأضلاع تصلح أو لا تصلح
تجيب أصغر ضلعين وتجمعهم
لو كانوا أكبر من الثالث تصلح
لو أصغر أو يساوى الثالث لا تصلح

⑨ فى △ أ ب جـ يكون
أ ب + ب جـ - أ جـ > صفر
لأن مجموع أى ضلعين أكبر من الثالث
يعنى الضلعين - الثالث > صفر

دى آخر حصة الترم الأول
ذاكر كويس وركز وربنا يوفقكم جميعاً
محمد أدهم

أ/ محمد أدهم
معلم رياضيات
٠١٠٠٧٤٥١٩٥٧

نشاط ١ بين أي من المجموعات التالية تصلح أن تكون أطوال أضلاع مثلث

١) ٥سم ، ٦سم ، ١٠سم

الحل

٥+٦ = ١١ > ١٠ تصلح

٢) ٣سم ، ٤سم ، ٧سم

الحل

٣ + ٤ = ٧ لا تصلح

يجب أن يكونوا أكبر من ٧

٣) ٥سم ، ٦سم ، ١٤سم

الحل

٥+٦ = ١١ < ١٤ لا تصلح لأنه يجب أن يكونوا أكبر من ١٤

٤) مثلث متساوي الساقين أطوال أضلاعه ٥سم ، ١٠سم

= ١٠سم

٥) مثلث له محور تماثل واحد أطوال أضلاعه ٤سم ، ٨سم فإن محيطه = ٤+٨+٨ = ٢٠سم

٦) إذا كان طولا ضلعين في مثلث ٥سم ، ٧سم فإن الضلع الثالث ∋ -----]٢ ، ١٢[

٧-٥ = ٢ ٧+٥ = ١٢

٧) إذا كان طولا ضلعين في مثلث ٦سم ، ٩سم فإن الثالث ∋ ---

٩-٦ = ٣ ٩+٦ = ١٥

]٣ ، ١٥[

الواجب

١ الحل

١) مجموع أي ضلعين في مثلث --- الضلع الثالث

٢) طول أي ضلع في مثلث --- نصف المحيط

٣) مثلث متساوي الساقين أضلاعه ٢سم ، ٤سم ، ---

٤) مثلث متساوي الساقين ٥سم ، ١٠سم فإن محيطه = ---

٥) مثلث فيه ضلعان ٦سم ، ١٠سم فإن الضلع الثالث ∋ ---

٢ أيهما يصلح أن يكون أضلاع مثلث

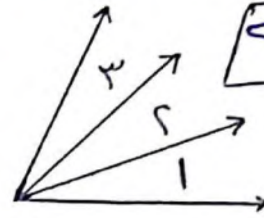
١) ٣سم ، ٧سم ، ١٠سم

٢) ٥سم ، ٩سم ، ١٢سم

مهارات في حساب عدد المثلثات والمستطيلات

اختر الإجابة الصحيحة

١) عدد الزوايا الحادة في الشكل المقابل



٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

الفكرة هرقم واجمع ١+٢+٣=٦

٢) عدد المثلثات في الشكل المقابل

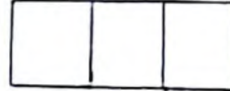


٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

الفكرة هرقم واجمع ١+٢+٣=٦

٣) عدد المستطيلات في الشكل المقابل

١ + ٢ + ٣

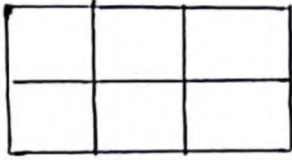


٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦

الفكرة هرقم واجمع ١+٢+٣=٦

٤) عدد المستطيلات في الشكل المقابل

١ + ٢ + ٣ = ٦



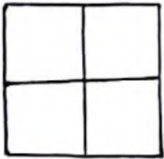
١ + ٢ = ٣

٦ × ٣ = ١٨

٣ ، ٦ ، ١٢ ، ١٨

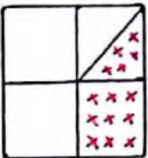
٥) عدد المربعات في الشكل

$(١)^٢ + (٢)^٢ = ١ + ٤ = ٥$



١ ، ٣ ، ٤ ، ٥

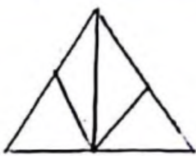
٦) مساحة الجزء المظلل



$\frac{١}{٨}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ، $\frac{٣}{٤}$

يا سلام عليك يا أبو أدهم يافخر العرب

٧) عدد المثلثات في الشكل المقابل



٣ ، ٤ ، ٦ ، ٧

١+٢=٣
١+٢=٣
٦+١=٧